Universitatea „Constantin Brâncuşi” Tg-Jiu
Facultatea de Inginerie



MATEMATICI SPECIALE

-CURS-

Prof. univ. dr.
MIODRAG IOVANOV

Tg Jiu
- 2006 -

CUPRINS

CAPITOLUL I **ECUAȚII DIFERENȚIALE**

CAPITOLUL II . **FUNCȚII COMPLEXE**

CAPITOLUL III . **FUNCȚII SPECIALE**

CAPITOLUL IV . **SERII FOURIER**

CAPITOLUL V . **TRANSFORMĂRI INTEGRALE**

CAPITOLUL VI. **ECUAŢIILE FIZICII MATEMATICE**

CAPITOLUL VII . **ELEMENTE DE CALCUL VARIAȚIONAL**

CAPITOLUL VIII . **DISTRIBUȚII**

CAPITOLUL IX **ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR**

CAPITOLUL X

CAPITOLUL I

ECUAȚII DIFERENȚIALE

1. Ecuații diferențiale. Soluția generală. Soluții particulare. Interpretarea geometrică. Exemple. Problema Cauchy.

Definiție. Fie $F(x,y,y',\dots,y^{(n)})$ o funcție reală definită pe $[a,b] \times Y, Y \subset \mathbf{R}^{n+1}$, având argumente variabila reală $x \in [a,b]$ şi funcția reală y împreună cu derivatele ei $y', y'', \dots, y^{(n)}$. Relația:

(1) $F(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0$

se numeşte ecuație diferențială de ordinul *n*, dacă se cere să se determine funcțiile $y=f(x)$ definite pe intervalul $[a,b]$, având derivate până la ordinul *n* inclusiv în orice punct al intervalului $[a,b]$ astfel încât să avem:

$F(x,f(x),f'(x),\dots,f^{(n)}(x))=0$ pentru orice $x \in [a,b]$.

Funcțiile reale $f(x)$ care îndeplinesc condițiile de mai sus se numesc soluții ale ecuației diferențiale (1).

Dacă (1) poate fi scrisă:

(2) $y^{(n)}=f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})$

atunci (2) se numeşte *forma normală* a ecuației (1).

Dacă n=1, din (1) avem $F(x,y,y')=0$ care este o ecuație diferențială de ordinul întâi (sau $y'=f(x,y)$ forma explicită). Soluțiile ecuației $F(x,y,y')=0$ se pot pune sub forma $y=\varphi(x,C)$, *C* constantă şi se numesc *soluții generale*. Dacă dăm lui *C* o valoare particulară obținem o *soluție particulară*.

Ecuația $y=xy'+y'^2$ are soluția generală $y=Cx+C^2$şi $y=-\frac{x^2}{4}$ numită *soluțiesingulară*. Din punct de vedere geometric, ecuația $\frac{dy}{dx}=f(x,y),\ (x,y)\in D$ reprezintă un câmp de direcții, graficul unei soluții $y=\varphi(x)$ este o curbă situată în *D,* cu proprietatea că în fiecare punct (x,y) al său, tangenta la curbă reprezentată printr-un vector face cu axa *Ox* un unghi α, astfel că $\mathrm{tg}\,\alpha=f(x,y)$.

2. <u>Ecuații diferențiale de ordinul întâi rezolvate în raport cu *y'*, integrabile prin metode elementare.</u>

2.1. *Ecuații cu variabile separate.*

Ecuația diferențială

(1) $P(x)dx+Q(y)dy=0$

se numeşte *ecuație cu variabile separate*. Soluția generală se obține astfel:

$$\int_{x_0}^{x} P(x)dx + \int_{y_0}^{y} Q(y)dy = C$$

2.2. *Ecuații omogene.*

Ecuațiile diferențiale omogene sunt de forma:

(2) $$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) .$$

Dacă se face schimbarea de funcție: $y=tx$, ecuația (2) se transformă într-o ecuație cu variabile separate.

Într-adevăr, avem:

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dt}{dx} + t$$

şi ecuația (2) devine: $x\frac{dt}{dx} + t = f(t)$ sau $\frac{dt}{f(t)-t} = \frac{dx}{x}$ care este o ecuație cu variabile separate.

Exemplu. Să se rezolve ecuația: $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x}-1}{\frac{y}{x}+1}$. Efectuând substituția $y=tx$ ecuația devine: $\frac{t+1}{t^2+1}dt = -\frac{dx}{x}$ de unde integrând şi revenind la $t = \frac{y}{x}$, obținem integrala generală: $\ln\sqrt{x^2+y^2} + arctg\frac{y}{x} = C$.

2.3. *Ecuații reductibile la ecuații omogene.*

Ecuația de forma:

(3) $$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

unde $y' = \dfrac{dy}{dx}$, $a_k, b_k, c_k \in \mathrm{R}$ $(k = 1{,}2)$ este reductibilă la o ecuație omogenă.

1)Dacă $c_1=c_2=0$, ecuația este omogenă de tipul anterior.

2) Dacă $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ şi $a_1b_2 - a_2b_2 \neq 0$ dreptele $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ şi $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ nu sunt paralele şi se intersectează în punctul (x_0,y_0). În acest caz facem substituția: $\begin{cases} x = x_0 + u \\ y = y_0 + v \end{cases}$

şi ecuația (3) devine: $\dfrac{dv}{du} = f\left(\dfrac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right)$. Cu ajutorul substituției $v=u\cdot t$ se obține o ecuație cu variabile separate.

3) Dacă $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$, $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, dreptele sunt paralele deoarece $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{1}{k}$. În acest caz ecuația (3) se poate scrie sub forma:

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{k(a_1x + b_1y) + c_2}\right)$$ şi dacă facem substituția $z=a_1x+b_1y$

ecuația devine:

$\dfrac{1}{b_1}\left(\dfrac{dz}{dx} - a_1\right) = f\left(\dfrac{z + c_1}{kz + c_2}\right)$, care se poate transforma într-o ecuație cu variabile separate.

Exemplu. Să se integreze ecuația :

$$y' = \frac{x + y - 3}{x - y + 1}.$$

Dreptele $x+y+3=0$, $x-y+1=1$ se intersectează în punctul (1,2); cu ajutorul schimbării $x=u+1$, $y=v+2$ obținem ecuația: $\dfrac{dv}{du} = \dfrac{u + v}{u - v}$ (omogenă). Efectuând substituția $v=tu$ obținem o ecuație cu variabile separate: $\dfrac{1 - t}{1 + t^2}dt = \dfrac{du}{u}$ care după integrare dă soluția: $arctgt - \dfrac{1}{2}\ln(1 + t^2) = \ln u + C$ sau cu ajutorul variabilelor x şi y găsim:

$$arctg\frac{y - 2}{x - 1} = \ln\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2} + C.$$

2.4. *Ecuații diferențiale liniare de ordinul întâi.*

O ecuație de forma:

(4) $y'+P(x)y=Q(x)$

unde $P(x)$ şi $Q(x)$ sunt funcții continue pe $[a,b]$, se numeşte *ecuație diferențială liniară de ordinul întâi.*

Pentru rezolvarea ecuației (4) vom rezolva mai întâi ecuația $y'+P(x)y=0$ numită ecuația liniară omogenă.

Aceasta este cu variabile separate: $\frac{dy}{y}=-P(x)dx$ cu soluția generală $y=Ce^{-\int P(x)dx}$. Căutăm pentru ecuația neomogenă (4) o soluție de forma: $y=C(x)e^{-\int P(x)dx}$.

Înlocuind această soluție în (4) rezultă:

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx}+C(x)e^{-\int P(x)dx}\cdot(-P(x))+P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x)$$

sau $C'(x)=Q(x)e^{\int P(x)dx}$.

Integrând obținem funcția $C(x)$:

(5) $C(x)=\int Q(x)\cdot e^{\int P)(x)dx}dx+C_1$, C_1 constantă.

Rezultă soluția generală a ecuației (4) sub forma:

(6) $y=e^{-\int P(x)dx}\left[C_1+\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx\right]$.

Metoda folosită pentru determinarea soluției generale (6) se numeşte *metoda variației constantei.*

2.5. *Ecuația lui Bernoulli.*

Ecuația lui Bernoulli este de forma:

(7) $y'+P(x)y=Q(x)\cdot y^{\alpha}$

unde $P(x)$, $Q(x)$ sunt continue pe $[a,b]$, α este o constantă $\alpha \neq 0$ şi $\alpha \neq 1$ (altfel avem o ecuație liniară).

Dacă se efectuează schimbarea de variabilă $z=y^{1-\alpha}$ ecuația (7) a lui Bernoulli se reduce la o ecuație liniară.

Într-adevăr, dacă se împarte cu y^{α} în (7), obținem

(8) $$\frac{1}{y^{\alpha}} \cdot y' + P(x) \cdot \frac{1}{y^{\alpha-1}} = Q(x).$$

Observăm că $z' = (1-\alpha) y^{-\alpha} \cdot y'$ de unde $\frac{y'}{y^{\alpha}} = \frac{z'}{(1-\alpha)}$ şi ecuația (8) devine:

(9) $$z' + (1-\alpha) P(x) \cdot z = (1-\alpha) Q(x)$$

care este o ecuație diferențială liniară de ordinul I în z. Apoi se obține y din relația $z=y^{1-\alpha}$.

2.6. <u>*Ecuația Riccati.*</u>

O ecuație diferențială de forma

(10) $$y' + P(x) y^2 + Q(x) y + R(x) = 0$$

cu $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ funcţii continue pe un interval $[a,b]$ se numeşte ecuația Riccati. Dacă se cunoaşte o soluție particulară a ecuației (10), y_p, prin schimbarea de variabilă $y = y_p + \frac{1}{z}$ ecuația se transformă într-o ecuație liniară. Avem: $y' = y'_p - \frac{z'}{z^2}$ şi ecuația (10) devine:

$$y'_p - \frac{z'}{z^2} + P(x) \cdot \left(y_p + \frac{1}{z} \right)^2 + Q(x) \left(y_p + \frac{1}{z} \right) + R(x) = 0$$

sau

$$y'_p + P(x) y_p^2 + Q(x) y_p + R(x) - \frac{1}{z} \left[z' - (2 y_p P(x) + Q(x)) z - P(x) \right] = 0$$

şi pentru că y_p este soluție a ecuației (10) obținem ecuația:

$$z' - (2y_p P(x) + Q(x)) z - P(x) = 0$$

care este o ecuație liniară în z.

2.7. <u>*Ecuația lui Lagrange şi Clairaut.*</u>

Ecuația lui *Lagrange* este de forma:

(11) $$y = x\varphi(y') + \psi(y')$$

Integrarea ecuației lui Lagrange se reduce la integrarea unei ecuații liniare în modul următor. În (11) înlocuim $y' = p$ şi obținem: $y = x\varphi(p) + \psi(p)$. Derivăm în raport cu x şi obținem:

$$p = \varphi(p) + x\varphi'(p) \cdot p' + \psi'(p) \cdot p'$$

sau:

$$p'(x\varphi'(p)+\psi'(p)) = p-\varphi(p)$$

Dacă $p-\varphi(p)\neq 0,\ p'=\dfrac{dp}{dx}$ obținem ecuația liniară:

(12) $$\frac{dx}{dp}+\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}x=\frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}$$

Rezolvând ecuația liniară (12) obținem soluția ecuației (11) sub formă parametrică:

(13) $$\begin{cases} x = f(C,p) \\ y=\varphi(p)f(C,p)+\psi(p) \end{cases}$$

parametrul fiind *p*, iar *C* o constantă arbitrară.

Dacă în (11) considerăm $\varphi(y')=y'$ obținem ecuația

(14) $$y = xy'+\psi(y')$$

numită *ecuația lui Clairaut*.

Notăm cu *y′=p* şi avem $y = xp+\psi(p)$. Derivăm în raport cu *x* şi obținem: $p = p+xp'+\psi'(p)\cdot p'$ sau $p'(x+\psi'(p))=0$. Sunt două posibilități:

1) *p′= 0* deci *p=C* şi înlocuind în (14) obținem:

(15) $$y = C\cdot x+\psi(C)$$

care este o familie de drepte şi este soluție generală a ecuației Clairaut.

2) $x+\psi'(p)=0$,

pe care dacă o înlocuim în (14) obținem soluția:

(16) $$\begin{cases} x=-\psi'(p) \\ y=-p\psi'(p)+\psi(p) \end{cases},\ p\in[a,b].$$

numită *integrala singulară*.

Observație. Se poate arăta că integrala singulară este înfăşurătoarea familiei de curbe pe care o reprezintă soluția generală.

3. <u>Ecuații diferențiale de ordin superior.</u>

O ecuație diferențială de forma**:**

(1) $$F(x,y,y,'y'',...,y^{(n)})=0$$

este de ordin superior daca $n\geq 2,\ n\in$ **N.**

Funcția $y=\varphi(x,C_1,C_2,...,C_n)$ este soluție generală a ecuației (1). Problema Cauchy este problema determinării soluției $y=\varphi(x),\ x\in[a,b]$ care îndeplineşte condițiile inițiale

(2) $y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y'_0, ..., y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$
valorile $y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}$ fiind date.

Ecuații diferențiale integrabile prin cuadraturi

Ecuația $y^{(n)}=0$ are, ca soluție generală, un polinom arbitrar de gradul $n-1$.

Ecuația $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)})=0$ se transformă prin substituția $y^{(k)}=u$ într-o ecuație diferențială de ordinul $n-k: F(x, u, u', u'', ..., u^{(n-k)})=0$.

Ecuația $F(x, y, y', ..., y^{(n)})=0$ omogenă în $y, y', ..., y^{(n)}$, i se reduce ordinul cu o unitate prin schimbarea de funcție $\frac{y'}{y}=u$. Într-adevăr

$$y'=yu,\ \ y''=y'u+yu'=y(u^2+u') \text{ etc.}$$

Exemplu. Să se integreze ecuația diferențială

$$x^2yy''=(2y+xy')^2, \quad x\neq 0$$

Cu y' şi y'' calculați mai sus ecuația devine:

$$x^2y^2(u^2+u')=(2y+xyu)^2$$

sau $u'-\frac{4}{x}u=\frac{4}{x^2}$ care este o ecuație liniară în u, u' cu soluția:

$$u=C_1x^4-\frac{4}{5x}.$$

Înlocuind $u=\frac{y'}{y}$ rezultă ecuația: $\frac{y'}{y}=C_1x^4-\frac{4}{5x}$ care este o ecuație cu variabile separate şi care are soluția generală: $y=C_2x^{-\frac{4}{5}}e^{C_1\frac{x^5}{5}}, x\neq 0.$

4. Ecuații diferențiale de ordinul *n*, liniare. Dependența liniară. Wronskian. Soluția generală a unei ecuații diferențiale liniare.

O ecuație diferențială de forma:

(1) $a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+...+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$

se numeşte *ecuație diferențială de ordinul n, liniară şi neomogenă*; o ecuație diferențială de forma:

(2) $$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+...+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$$

se numeşte *ecuație diferențială de ordinul n, liniară şi omogenă*. Dacă $y_1, y_2, ..., y_n$ sunt soluții ale ecuației (2) atunci şi

(3) $$y=C_1y_1+C_2y_2+...+C_ny_n$$

unde $C_1, C_2, ..., C_n$ sunt constante arbitrare, este de asemenea soluție a ecuației (2).

Definiție. Fie $y_1(x), y_2(x),...,y_n(x)$ *n* funcții pe un interval [*a,b*]. Se spune că aceste funcții sunt *liniar independente* pe [*a,b*] dacă nu există *n* numere $\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_n$ nu toate nule, astfel încât să avem $\lambda_1 y_1(x)+\lambda_2 y_2(x)+...+\lambda_n y_n(x)=0$ pentru orice $x\in[a,b]$.

Exemplu. Funcțiile 1, x, e^x sunt liniar independente pe **R** deoarece condiția $\lambda_1+\lambda_2 x+\lambda_3 e^x=0$ pentru orice $x\in\mathbf{R}$ implică $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.

Fie $y_1(x), y_2(x),...,y_n(x)$, *n* funcții derivabile continue, până la ordinul *n-1* inclusiv, pe intervalul [*a,b*]; determinatul următor

(4) $$W(y_1,y_2,...,y_n)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \\ y'_1 & y'_2 & ... & y'_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

se numeşte wronskianul funcțiilor $y_1, y_2,...,y_n$.

Dacă funcțiile $y_1(x), y_2(x),...,y_n(x)$, derivabile continue până la ordinul *n*-1 inclusiv pe [*a,b*], sunt liniar dependente pe [*a,b*], atunci wronskianul lor este nul în orice punct din [*a,b*].

Are loc:

Teorema. Dacă $y_1, y_2,...,y_n$ sunt liniar independente pe [*a,b*] şi dacă wronskianul: $W(y_1, y_2,...,y_n, y)=0$ pentru orice $x\in[a,b]$, atunci *y* este o combinație liniară de funcțiile $y_1, y_2,...,y_n$ adică:

(5) $$y=C_1y_1+C_2y_2+...+C_ny_n$$

unde $C_1, C_2,...,C_n$ sunt constante.

Să considerăm ecuația diferențială de ordinul *n*, omogenă

(6) $$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+...+a_{n-1}(x)y=0$$

cu $a_1(x), a_2(x),...,a_n(x)$ funcții continue pe [*a,b*].

Fie $y_1, y_2,...,y_n$, n soluții ale ecuației date, definite pe $[a,b]$, atunci orice soluție a ecuației (6) pe $[a,b]$ este de forma.

(7) $\quad y=C_1y_1+C_2y_2+...+C_ny_n,\ x\in[a,b]$,

unde $C_1, C_2,..., C_n$ sunt constante. Funcția y din (7) se numeşte *soluție generală* a ecuației (6) pe $[a,b]$.

Un sistem de soluții $y_1, y_2,...,y_n$ ale ecuației (6), definit pe $[a,b]$ cu

$W(y_1, y_2,...,y_n)\neq 0$ pe $[a,b]$ se numeşte *sistem fundamental* de soluții al ecuației (6).

Astfel, dacă $y_1, y_2,...,y_n$, formează un sistem fundamental de soluții pe $[a,b]$, atunci $y=C_1y_1+C_2y_2+...+C_ny_n,\ x\in[a,b]$, se numeşte soluție generală a ecuației (6) pe $[a,b]$.

Dacă $y_1, y_2,...,y_n$ formează un sistem fundamental pe $[a,b]$ atunci ele sunt liniar independente pe $[a,b]$ şi reciproc. Fie ecuația diferențială liniară de ordinul n, omogenă:

(8) $\quad a_0y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+...+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0.$

Dacă cunoaştem o soluție particulară y_1 a ecuației date, prin schimbarea de variabilă $y=y_1\cdot z$, îi putem micşora ordinul cu o unitate. Obținem succesiv:

$$y=y_1z,\ y'=y_1'z+y_1z', y''=y_1''z+2y_1'z'+y_1z'',..., y^{(n)}=y_1^{(n)}z+C_n^1y_1^{(n-1)}z'+...+C_n^ny_1z^{(n)}.$$

Înlocuind în (8) avem:

$$z[a_0(x)y_1^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+...+a_n(x)y_1]+z'[a_1(x)y_1+...+C_n'a_0(x)y_1^{(n-1)}]+...+z^{(n)}a_0(x)y_1=0.$$

Coeficientul lui z este nul pentru că y_1 este soluție a ecuației date. Cu o nouă schimbare de variabilă $z'=u$, obținem o ecuație diferențială liniară şi omogenă de ordinul $n-1$:

$$A_0(x)u^{(n-1)}+A_1(x)u^{(n-2)}+...+A_{n-1}(x)u=0.$$

5. <u>Ecuații diferențiale de ordinul *n*, liniare şi neomogene. Soluția generală. Metoda variației constantelor pentru determinarea unei soluții particulare a ecuației neomogene. Exemplu.</u>

Fie ecuația diferențială de ordinul n, liniară şi neomogenă:

(1) $L_n(y) = a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$

cu coeficienții $a_k(x),\ k = 0,1,\dots,n$ şi $f(x)$ continuie, iar $a_0(x) \neq 0$ $[a,b]$. Soluția generală a ecuației (1) se obține adăugând la soluția generală a ecuației omogene:

(2) $L_n(y) = a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$

o soluție particulară (oarecare) a ecuației neomogene (1).

Într-adevăr, fie $y_p(x)$ o soluție particulară a ecuației neomogene pe $[a,b]$. Facem schimbarea $y(x)=y_p+z$.

Avem (L_n este liniar) $L_n(y_p + z) = L_n(y_p) + L_n(z) = f(x)$; cum $L_n(y_p) = f(x)$ rezultă $L_n(z)=0$; prin urmare, dacă $y_1, y_2,\dots,y_n$ este un sistem fundamental de soluții ale ecuației omogene pe $[a,b]$, rezultă că soluția generală a ecuației neomogene este:

(3) $y = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n + y_p,\quad x \in [a,b]$

Are loc următoarea teoremă:

<u>Teoremă</u>. Fie ecuația (1) şi $y_1, y_2,\dots,y_n$ un sistem fundamental de soluții pe $[a,b]$ al ecuației (2). O soluție particulară $y_p(x)$ a ecuației neomogene (1) pe $[a,b]$ este dată de:

(4) $y_p = y_1\int C'_1(x)dx + y_2\int C'_2(x)dx + ... + y_n\int C'_n(x)dx$

unde $C'_1(x), C'_2(x),\dots,C'_n(x)$ este soluția sistemului :

$$(5)\quad \begin{cases} y_1C'_1(x) + y_2C'_2(x) + ... + y_nC'_n(x) = 0 \\ y'_1C'_1(x) + y'_2C'_2(x) + ... + y'_nC'_n(x) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_1^{(n-2)}C'_1(x) + y_2^{(n-2)}C'_2(x) + ... + y_n^{(n-2)}C'_n(x) = 0 \\ y_1^{(n-1)}C'_1(x) + y_2^{(n-1)}C'_2(x) + ... + y_n^{(n-1)}C'_n(x) = \dfrac{f(x)}{a_0(x)}. \end{cases}$$

Dacă efectuăm cuadraturile :

$$\int C'_k(x)dx = A_k + \varphi_k(x),\quad k \in \{1,2,\dots,n\}$$

şi le înlocuim în (4), obținem soluția generală a ecuației neomogene:

(6) $y = A_1y_1 + A_2y_2 + ... + A_ny_n + y_1\varphi_1 + y_2\varphi_2 + ... + y_n\varphi_n.$

Demonstrație. Fie $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un sistem fundamental de soluții ale ecuației omogene (2). Soluția generală a ecuației omogene va fi aşadar:

(7) $y_H = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$,

unde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sunt constante arbitrare. Dacă reuşim să arătăm că funcția $y_p = y_1\varphi_1 + y_2\varphi_2 + \ldots + y_n\varphi_n$ cu $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ determinate pe [a,b], după cum este precizat în enunțul teoremei, este o soluție particulară a ecuației neomogene, atunci, conform celor spuse la alineatul precedent, funcția:

(8) $y = y_H + y_p$

este soluția generală a ecuației neomogene pe [a,b]. Ne rămâne aşadar să verificăm că y_0 este o soluție a ecuației neomogene.

În acest scop să considerăm funcția:

(9) $y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \ldots + C_n(x)y_n,\ x \in [a,b]$

care se obține din soluția generală a ecuației omogene înlocuind constantele $C_1, C_2, \ldots, C_n$, cu funcțiile necunoscute $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ şi să arătăm că funcția y dată de (9) cu $C'_1(x), C'_2(x), \ldots, C'_n(x)$ verificând sistemul (5). Dacă derivăm pe y din (9) obținem:

$$y' = C_1 y'_1 + C_2 y'_2 + \ldots + C_n y'_n + C'_1 y_1 + C'_2 y_2 + \ldots. + C'_n y_{n.}$$

însă, conform primei ecuații din (5) anume $C'_1 y_1 + C'_2 y_2 + \ldots. + C'_n y_{n.} = 0$ ne mai rămâne

(10) $y' = C_1 y'_1 + C_2 y'_2 + \ldots + C_n y'_n$.

În continuare, dacă derivăm pe (10), obținem:

$$y'' = C_1 y''_1 + C_2 y''_2 + \ldots + C_n y''_n + C''_1 y_1 + C''_2 y_2 + \ldots. + C''_n y_{n.}$$

însă conform ecuației a doua din (5), anume $y'_1 C'_1(x) + y'_2 C'_2(x) + \ldots + y'_n C'_n = 0$, ne mai rămâne:

(11) $y'' = C_1 y''_1 + C_2 y''_2 + \ldots + C_n y''_n$.

În mod asemănător obținem:

$$y^{(3)} = C_1 y_1^3 + C_2 y_2^{(3)} + \ldots + C_n y_n^{(3)}$$

....

$$y_n^{(n-1)} = C_1 y_n^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}.$$

În ceea ce priveşte derivata de ordinul n, obținută prin derivare din ultima relație, avem:

$$y^{(n)} = C_1 y_1^{(n)} + C_2 y_2^{(n)} + \ldots + C_n y_n^{(n)} + C'_1 y_1^{(n-1)} + C'_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + C'_n y_n^{(n-1)}$$

sau, ținând seama de ultima relație din (5):

(12) $$y^{(n)} = C_1 y_1^{(n)} + C_2 y_2^{(n)} + \ldots + C_n y_n^{(n)} + \frac{f(x)}{a_0(x)}\ .$$

Dacă înmulţim acum pe y dat de (9) cu $a_n(x)$ pe y' dat de (10) cu $a_{n-1}(x)$ ş.a.m.d., pe $y^{(n)}$ dat de (12) cu $a_0(x)$, obţinem prin însumare:

$$L_n[y] = C_1 L_n[y_1] + C_1 L_n[y_2] + ... + C_n L_n[y_n] + f(x);$$

însă $L_n[y_k]=0,\ k=1,2,...,n$ astfel încât ne mai rămâne $L_n[y]=f(x)$; prin urmare y, date de (9) cu $C_1,C_2,...,C_n$, verificând sistemul (5), este soluţie a ecuaţiei (1). Să observăm că determinantul sistemului (5) este $W(y_1,y_2,...,y_n) \neq 0$ pe $[a,b]$. Fie $C'_1,C'_2,...,C'_n$ soluţia sistemului (5) cu

$$C'_k(x) = (-1)^{n+k} \cdot \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_{k-1} & y_{k+1} & \cdots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_{k-1} & y'_{k+1} & \cdots & y'_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_{k-1}^{(n-1)} & y_{k+1}^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}{W(y_1,y_2,...,y_n)} \cdot \frac{f(x)}{a_0(x)}.$$

Prin n cuadraturi obţinem:

$$C_k(x) = \int C'_k(x)dx = \varphi_k(x) + A_k,\ k \in \{1,2,...,n\}$$

unde $A_1,A_2,...,A_n$ sunt constante arbitrare.

Înlocuind pe $C_k(x)$ în (9) obţinem:

(13) $$y = y_1 A_1 + y_2 A_2 + ... + y_n A_n + \varphi_1 y_1 + \varphi_2 y_2 + ... + \varphi_n y_n$$

care este soluţia generală a ecuaţiei neomogene.

Funcţia $y_p = \varphi_1 y_1 + \varphi_2 y_2 + ... + \varphi_n y_n$, este o soluţie a ecuaţiei liniare neomogene şi este prin urmare soluţia particulară căutată. Teorema este demonstrată

Metoda folosită pentru a determina o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene (1) se numeşte *metoda variaţiei constantelor* şi se datorează lui Lagrange.

Exemplu. Să se găsească soluţia generală a ecuaţiei: $x^2 y'' - 5xy' + 8y = x$. Două soluţii ale ecuaţiei omogene sunt $y_1=x^2,\ y_2=x^4$ cu $W(y_1,y_2)=2x^5 \neq 0$ pe $\mathbf{R}\backslash\{0\}$; soluţia generală a ecuaţiei este $y=C_1x^2+C_2x^4$. Determinăm o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene prin metoda variaţiei constantelor. Avem:

$$\begin{cases} C'_1 x^2 + C'_2 x^4 = 0 \\ C'_1 2x + C'_2 4x^3 = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$ cu soluţiile:

$$C'_1 = -\frac{1}{2x^2},\ C'_2 = \frac{1}{2x^4}$$ şi apoi $$C_1 = C_1^* + \frac{1}{2x},\ C_2 = C_2^* - \frac{1}{6x^3}.$$

Soluţia generală a ecuaţiei este, aşadar:

$$y = C_1 x^2 + C_2 x^4 + \frac{x}{3},\ x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

(am renotat $C_1^* = C_1,\ C_2^* = C_2$).

6. Ecuații diferențiale de ordinul *n*, liniare, cu coeficienți constanți.

O ecuație diferențială liniară

(1) $$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = 0,\ a_0 \neq 0$$

unde $a_k \in \mathbf{R},\ k = \overline{0,n}$, este o ecuație de ordinul *n*, cu coeficienți constanți, omogenă. Pentru această clasă putem determina totdeauna un sistem fundamental de soluții.

$V(r_1,r_2,...,r_n) \neq 0$ dacă $r_i \neq r_j,\ i \neq j$ întrucât este determinatul lui Vandermonde.

Soluția generală a ecuației (1) este:

(3) $$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + ... + C_n e^{r_n x},\ x \in \mathbf{R}$$

Exemplu. Să se găsească soluția ecuației:

$y^{(3)}+3y''-y-3y=0$. Ecuația caracteristică $r^3+3r^2-r-3=0$ are rădăcinile $r_1=-1, r_2=1, r=-3$ deci soluția generală este: $y=C_1e^{-x}+C_2e^{x}+C_3e^{-3x}$.

Dacă căutăm soluții de forma $y=Ae^{rx},\ a\neq 0$, obținem succesiv $y'=Are^{rx}$, $y''=Ar^2e^{rx}, ..., y^{(n)}=Ar^ne^{rx}$; dacă le înlocuim în (1) avem:

$$Ae^{rx}(a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + ... + a_{n-1} r + a_n) = 0;$$

deoarece $A\neq 0$, e^{rx} nu se anulează pentru $x \in \mathbf{R}$, va trebui să avem

(2) $$a_0r^n+a_1r^{n-1}+...+a_{n-1}r+a_n=0.$$

Prin urmare, numărul (real sau complex) *r* trebuie să fie rădăcină a ecuației (2) care se numeşte *ecuația caracteristică* a ecuației diferențiale (1).

Să observăm de la început că dacă ecuația caracteristică (2) are toate rădăcinile simple $r_1\neq r_2\neq ...\neq r_n$, atunci soluțiile particulare $y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}, ..., y_n = e^{r_n x}$ formează un sistem fundamental de soluții ale ecuației (1). Într-adevăr, calculând wronskianul lui $y_1, y_2, ..., y_n$, obținem:

$$W(y_1, y_2, ..., y_n) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} & \cdots & e^{r_n x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} & \cdots & r_n e^{r_n x} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_1^{n-1} e^{r_1 x} & r_2^{n-1} e^{r_2 x} & \cdots & r_n^{n-1} e^{r_n x} \end{vmatrix} = e^{(r_1 + r_2 + ... + r_n)x} \cdot V(r_1, r_2, ..., r_n)$$

şi se observă că este diferit de zero pentru orice $x \in \mathbf{R}$,deoarece exponențiala nu se anulează pe R iar $V(r_1, r_2, ..., r_n) \neq 0$ dacă $r_i \neq r_j, i \neq j$ ($V(r_1, r_2, ..., r_n)$ este determinantul lui Vandermonde).

Soluția generală a ecuației (1) este:

(3) $\quad y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + ... + C_n e^{r_n x}$.

Dacă ecuația caracteristică (1) are rădăcinile complexe simple

$$\begin{matrix} r_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \; r_2 = \alpha_2 + i\beta_2, ..., \; r_m = \alpha_m + i\beta_m \\ \overline{r_1} = \alpha_1 - i\beta_1, \; \overline{r_2} = \alpha_2 + i\beta_2, ..., \; \overline{r_m} = \alpha_m - i\beta_m \end{matrix}, \; n = 2m$$

atunci funcțiile

$$y_k = e^{\alpha_k x} \cos \beta_k x, \quad y_k^* = e^{\alpha_k x} \sin \beta_k x, \quad k \in \{1, 2, ..., m\}$$

formează un sistem fundamental de soluții ale ecuației (1).

În acest caz, soluția generală a ecuației (1) este:

(4) $\quad y = \sum_{k=1}^{m} e^{\alpha_k x} (C_k \cos \beta_k x + C_k^* \sin \beta_k x)$

Observație. Dacă ecuația caracteristică are rădăcini reale şi complexe, atunci soluția generală a ecuației (1) este formată dintr-o combinație de tipul (3) şi (4).

Să considerăm cazul când ecuația (1) are rădăcini multiple. Dacă $r=a$ este o rădăcină reală multipla de ordinul p, atunci

(5) $\quad y=e^{ax}(C_1+C_2x+...+C_px^{p-1})$

este o soluție a ecuației (1). Dacă $r=\alpha+i\beta \in \mathbf{C}$ este multiplă de ordinul p, atunci:

(6) $\quad y = e^{\alpha x}\left[(C_1 + C_2 x + ... + C_p x^{p-1}) \cos \beta x + (C_1^* + C_2^* x + ... + C_p^* x^{p-1}) \sin \beta x\right]$

este o soluție a ecuației (1).

7. Ecuații neomogene. Determinarea soluției particulare.

Să considerăm ecuația neomogenă

(1) $\quad a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$.

Soluția generală a ecuației este:

(2) $\quad y = y_h + y_p$

unde y_h este soluției omogene ataşate ecuației (1) iar y_p este o soluție particulară a ecuației neomogene.

Pentru determinarea lui y_p putem folosi metoda variației constantelor, care ne permite, cunoscând soluția generală a ecuației omogene, să găsim o soluție particulară a ecuației neomogene prin n cuadraturi.

În aplicații sunt cazuri frecvente, când în funcție de forma lui $f(x)$, putem găsi prin identificare pe y_p. Enumerăm mai jos aceste cazuri:

a) Funcția $f(x)$ este un polinom $P_m(x)$.

Soluția y_p va fi tot un polinom, de acelaşi grad, $Q_m(x)$, daca $r=0$ nu este rădăcină a ecuației caracteristice $a_0r^n+...+a_n=0$. Vom înlocui $y_p=Q_m(x)$ în (1) şi prin identificare vom găsi soluția particulară y_p. Dacă $r=0$ este rădăcină a ecuației caracteristice, multiplă de ordinul k $(k\in\mathbf{N}^*)$, atunci vom alege $y_p=x^k\cdot Q_m(x)$ şi prin înlocuire în (1) şi identificare vom găsi y_p.

b) Funcția $f(x)$ este un “polinom” de forma de forma $e^{\alpha x}P_m(x)$, ($P_m(x)$ polinom de grad m). Dacă $r=\alpha$ nu este rădăcină a ecuației caracteristice, atunci alegem $y_p=e^{\alpha x}Q_m(x)$ şi prin identificare, vom afla pe y_p. Dacă $r=\alpha$ este rădăcină multiplă de ordinul k ($k\in\mathbf{N}^*$) a ecuației caracteristice atunci o soluție particulară a ecuației (1) o vom căuta sub forma $y_p=x^ke^{ex}Q_m(x)$ şi vom proceda apoi ca înainte.

c) Dacă $f(x)$ este de forma $P_{m_1}(x)\cos\alpha x+Q_{m_2}(x)\sin\alpha x$ atunci dacă $\pm i\alpha$ nu este rădăcină a ecuației caracteristice atunci vom alege $y_p=P_m^*(x)\cos\alpha x+Q_m^*(x)\sin\alpha x,$ unde $m=\max(m_1,m_2)$ iar $P_m^*(x)$ şi $Q_m^*(x)$ sunt polinoame arbitrare care se determină apoi prin identificare. Dacă $\pm i\alpha$ este rădăcină multiplă de ordinul k atunci vom alege $y_p=x^k[P_m^*(x)\cos\alpha x+Q_m^*(x)\sin\alpha x].$

d) Funcția $f(x)$ are forma $e^{\alpha x}[P_{m_1}(x)\cos\beta x+Q_{m_2}(x)\sin\beta x]$. Soluția particulară y_p va avea expresia:

$$y_p=e^{\alpha x}[P_m^*(x)\cos\beta x+Q_m^*(x)\sin\beta x]$$

($m=\max(m_1,m_2)$) dacă $\alpha\pm i\beta$ nu sunt rădăcini ale ecuației caracteristice sau va avea expresia:

$$y_p=x^ke^{\alpha x}[P_m^*(x)\cos\beta x+Q_m^*(x)\sin\beta x]$$

dacă $\alpha\pm i\beta$ sunt rădăcini multiple de ordinul k, ale ecuației caracteristice. Polinoamele $P_m^*(x)$ şi $Q_m^*(x)$ vor fi determinate prin identificare.

Exemplu. Să se găsească soluția generală a ecuației:

$$y^{(4)}+2y^{(3)}+5y''+8y'+4y=\cos x+40e^{-x}.$$

Ecuația caracteristică $r^4+2r^3+5r^2+8r+4=0$ se scrie $(r+1)^2(r^2+4)=0$ cu rădăcina dublă $r_1=-1$ şi rădăcinile simple $r_2=2i$, $r_3=-2i$. Soluția generală a ecuației omogene este: $y_h=(C_1+C_2x)e^{-x}+C_3\sin 2x+C_4\cos 2x,\ x\in\mathbf{R}$.

O soluție particulară a ecuației neomogene o căutăm de forma $y_p=Ax^2e^{-x}+B\cos x+C\sin x$. Înlocuind-o în ecuație şi identificând obținem $A=4,\ B=0,\ C=\dfrac{1}{6}$ deci soluția generală a ecuației date este:

$$y=(C_1+C_2x)e^{-x}+C_3\sin 2x+C_4\cos 2x+\frac{1}{6}\sin x+4x^2e^{-x},\ x\in\mathbf{R}.$$

8. Ecuația lui Euler. Exemplu.

O ecuație diferențială liniară de ordinul n de forma:

(1) $$a_0x^ny^{(n)}+a_1x^{(n-1)}y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}xy'+a_ny=f(x)$$

cu a_0, a_1,..., a_n constante reale, iar $f(x)$ continuă pe un interval $[a,b]$ se numeşte *ecuația lui Euler*.

Teoremă. O ecuație diferențială Euler (1), se transformă prin substituția $|x|=e^t$ în ecuație diferențială liniară cu coeficienți constanți.

Demonstrație. Pentru $x>0$, punem $x=e^t$ şi avem:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=e^{-t}\cdot\frac{dy}{dt}\quad \text{sau}\quad x\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=e^{-t}\frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right),\ \text{deci}\ x^2\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=e^{-t}\frac{d}{dt}\left[e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)\right]\ \text{sau}\ x^3\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}.$$

Se observă că toate produsele $x^k\cdot\dfrac{d^ky}{dx^k}$ se exprimă liniar cu ajutorul derivatelor $\dfrac{d^py}{dt^p}$, $p\in\{1,2,\ldots,k\},k\in\{1,2,\ldots,n\}$ înmulțite cu factori numerici, deci dacă îi înlocuim în ecuația (1), ea se va transforma într-o ecuație cu coeficienți constanți :

(2) $$b_0\frac{d^ny}{dt^n}+b_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\ldots+b_{n-1}\frac{dy}{dt}+b_ny=f(e^t)$$

unde b_0, b_1,...,b_n sunt constante reale.

Ecuația omogenă

(3) $$b_0 \frac{d^n y}{dt^n} + b\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + ... + b_{n-1}\frac{dy}{dt} + b_n y = 0$$

admite soluții de forma $e^{r_k t}$, unde r_k este o rădăcină a ecuației caracteristice. Revenind la ecuația (1) şi observând că $e^{r_k t} = (e^t)^{r_k} = |x|^{r_k}$ deducem că ecuația Euler, omogenă, admite soluții de forma $|x|^r$. Acest rezultat simplifică mult determinarea soluției generale a unei ecuații Euler.

Fie ecuația Euler, omogenă

(4) $$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} x y' + a_n y = 0 .$$

Vom căuta soluții de forma $y = A \cdot |x|^r$, A este constantă; avem, succesiv, $y' = Ar|x|^{r-1}, y'' = Ar(r-1)|x|^{r-2}, ..., y^{(n)} = Ar(r-1)...(r-n+1)|x|^{r-n}$, derivate pe care dacă le înlocuim în (1), şi observăm că se dă factor comun $A|x|^r$, obținem $A|x|^r \cdot K_n(r) = 0$ unde $K_n(r)$ este *ecuația caracteristică a ecuațiEuler:*

(5)

$$K_n(r) \equiv a_0 r(r-1)...(r-n+1) + a_1 r(r-1)...(r-n+2) + ... + a_{n-1} r + a_n = 0$$

Fie $r_1, r_2, ..., r_n$ rădăcinile ecuației caracteristice. După natura lor şi ordinul lor de multiplicitate, determinăm, la fel ca şi la ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți, sistemul fundamental de soluții al ecuației Euler considerate.

Exemplu. $x^2y''+2xy'+y=0$. Ecuația caracteristică $r(r-1)+3r+1=r^2+r+1=0$ are rădăcinile complexe $r_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ecuația diferențială va avea soluțiile particulare $y_1 = \frac{1}{\sqrt{|x|}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln|x|\right)$, $y_2 = \frac{1}{\sqrt{|x|}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln|x|\right)$, $x \neq 0$ şi deci soluția generală:

$$u = \frac{1}{\sqrt{|x|}}\left[C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln|x|\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln|x|\right)\right], \quad x \neq 0 .$$

Observație. Pentru determinarea unei soluții particulare a unei ecuații Euler, neomogene, se foloseşte metoda variației constantelor sau determinarea lui y_p după forma membrului drept al ecuației.

9. Sisteme de ecuații diferențiale. Exemplu.

Definiția 1. Relațiile

$$(1)\qquad \begin{cases} F_1(t;x,x',...,x^{(m)};y,y',...,y^{(n)};z,z',...,z^{(p)})=0 \\ F_2(t;x,x',...,x^{(m)};y,y',...,y^{(n)};z,z',...,z^{(p)})=0 \\ F_3(t;x,x',...,x^{(m)};y,y',...,y^{(n)};z,z',...,z^{(p)})=0 \end{cases}$$

unde funcțiile F_1,F_2,F_3 sunt definite pe $[a,b]\times X\times Y\times Z$ cu $X\subset \mathbf{R}^{m+1}$, $Y\subset \mathbf{R}^{n+1}$, $Z\subset \mathbf{R}^{p+1}$ formează un sistem de trei ecuații diferențiale cu trei funcții necunoscute $x,y,z,$ dacă se cere să se determine funcțiile $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, derivabile respectiv până la ordinul m,n,p pentru $t\in[a,b]$, funcții care împreună cu derivatele lor verifică (1) pentru orice $t\in[a,b]$.

Definiția 2. Un sistem de trei funcții reale $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ care verifică condițiile de mai sus se numeşte o soluție a sistemului (1).

Observații.

1) Dacă $m=n=p=1,$ sistemul (1) se numeşte sistem de ordinul întâi; dacă cel puțin unul dintre numerele m,n,p este mai mare decât unu, sistemul (1) se numeşte sistem de ordin superior.

2) Un sistem rezolvat în raport cu derivatele de ordinul cel mai înalt se numeşte *sistem canonic* (sau explicit). Dacă sistemul (1) poate fi rezolvat în raport cu derivatele $x^{(m)},y^{(n)},z^{(p)}$, *adică:*

$$(2)\qquad \begin{cases} x^{(m)}=f(t;x,x',...,x^{(m-1)};y,y',...,y^{(n-1)};z,z',...,z^{(p-1)}) \\ y^{(n)}=g(t;x,x',...,x^{(m-1)};y,y',...,y^{(n-1)};z,z',...,z^{(p-1)}) \\ z^{(p)}=h(t;x,x',...,x^{(m-1)};y,y',...,y^{(n-1)};z,z',...,z^{(p-1)}) \end{cases}$$

se obține sistemul canonic respectiv.

Definiția 3. Un sistem de n ecuații diferențiale de ordinul întâi, cu n necunoscute, este de forma:

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt}=f_1(t,y_1,y_2,...,y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dt}=f_2(t,y_1,y_2,...,y_n) \\ .... \\ \dfrac{dy_n}{dt}=f_n(t,y_1,y_2,...,y_n) \end{cases}$$

şi se numeşte sistem sub *forma normală a lui Cauchy.*

Un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordin superior este echivalent cu un sistem de ordinul întâi.

Aceasta se observă uşor din (2) dacă introducem funcţiile necunoscute:

$$\frac{dx}{dt}=x_1,\frac{dx_1}{dt}=x_2,\frac{dx_2}{dt}=x_3,\ldots,\frac{dx_{m-2}}{dt}=x_{m-1}$$

şi la fel în y şi z obţinem:

$$\frac{dx_{n-1}}{dt}=f(t,x,x_1,\ldots,x_{m-1};\ y,y_1,\ldots,y_{n-1};\ z,z_1,\ldots,z_{p-1})$$

şi la fel în y şi z.

Un sistem de n ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi este, în general, echivalent cu o singură ecuaţie diferenţială de ordinul n.

Observaţie. Un sistem de ordin superior este echivalent cu un sistem de ordinul întâi, iar rezolvarea acestuia se reduce în general la rezolvarea unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n.

Exemplul 1. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y-x\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=2y+4x\end{cases},\quad t\in\mathbf{R}$$

Din prima ecuaţie avem $y=x+\dfrac{dx}{dt}$; derivând, se obţine $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{d^2x}{dt^2}$ şi înlocuind în cea de-a doua ecuaţie a sistemului rezultă $\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{d^2x}{dt^2}=2\left(x+\dfrac{dx}{dt}\right)+4x$ sau $\dfrac{d^2x}{dt^2}-\dfrac{dx}{dt}-6x=0$.

Aceasta este o ecuaţie de ordinul doi cu coeficienţi constanţi. Ecuaţia caracteristică corespunzătoare $r^2-r-6=0$ are rădăcinile $r_1=3;\ r_2=-2$.

Soluţia generală a ecuaţiei este

$$x=C_1e^{3t}+C_2e^{-2t},$$

şi

$$y=4C_1e^{3t}-C_2e^{-2t}$$

Soluţia generală a sistemului dat este:

$$\begin{cases}x=C_1e^{3t}+C_2e^{-2t}\\ y=4C_1e^{3t}-C_2e^{-2t}\end{cases},\ t\in\mathbf{R}$$

şi reprezintă o familie de curbe, ce depinde de două constante arbitrare reale.

Pentru rezolvarea sistemelor de ecuaţii diferenţiale, din punct de vedere practic este mai indicată metoda eliminării, care conduce la o ecuaţie diferenţială de ordinul n cu coeficienţi constanţi.

Dacă sistemul de ecuaţii este neomogen, aceeaşi metodă este preferabilă.

Exemplul 2. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} y'-x=t \\ x'-4y=\sin t \end{cases}, \quad t\in\mathbf{R}$$

Din prima ecuaţie, $x=y'-t$ şi $x'=y''-1$. Înlocuind în a doua ecuaţie obţinem:

(4) $y''-4y=1+\sin t$

Soluţia ecuaţiei este $y=y_h+y_p$, unde y_h este soluţia ecuaţiei $y''-4y=0$. Ecuaţia caracteristică este $r^2-4=0$ cu $r_1=2,\ r_2=-2;$ deci $y_H=C_1e^{2t}+C_2e^{-2t}$; y_p îl alegem de forma $y_p=A+B\sin t+C\cos t$. Prin înlocuirea lui y_p în (4) şi identificând obţinem: $y_p=-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\sin t$. Deci :

$$y=C_1e^{2t}+C_2e^{-2t}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\sin t$$

şi din egalitatea $x=y'-t$ obţinem:

$$x=2C_1e^{2t}-2C_2e^{-2t}-\frac{1}{5}\cos t-t$$

Soluţia generală a sistemului dat este deci:

$$\begin{cases} x=2C_1e^{2t}-2C_2e^{-2t}-\frac{1}{5}\cos t-t \\ y=C_1e^{2t}+C_2e^{-2t}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\sin t \end{cases}$$

10. Sisteme simetrice. Definiţie. Integrale prime. Combinaţii integrabile. Exemple.

Definiţia 1. Un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi se numeşte *sistem simetric*, dacă are forma

(1) $$\frac{dx_1}{P_1(x_1,x_2,...,x_n)}=\frac{dx_2}{P_2(x_1,x_2,...,x_n)}=...=\frac{dx_n}{P_n(x_1,x_2,...,x_n)}$$

unde funcțiile $P_k(x_1,x_2,...,x_n)$ nu se anulează simultan pentru $(x_1,x_2,...,x_n)\in D\subset \mathbf{R}^n$.

Soluția generală a sistemului (1) este de forma:

(2) $$\begin{cases} F_1(x_1,x_2,...,x_n)=C_1 \\ F_2(x_1,x_2,...,x_n)=C_2 \\ .... \\ F_{n-1}(x_1,x_2,...,x_n)=C_{n-1} \end{cases}$$

unde $F_1,F_2,...,F_{n-1}$ sunt continue cu derivatele parțiale de ordinul întâi continue în $D\subset \mathbf{R}^n$. Orice relație $F_k(x_1,...,x_n)=C_k$, $k=\overline{1,n-1}$ se numeşte *integrală primă*. Din cele de mai sus, rezultă că dacă se cunosc *n-1* integrale prime ale sistemului (1), se cunoaşte soluția generală a sistemului (1).

Din (1) avem egalitatea:

(3) $$\frac{dx_1}{P_1}=\frac{dx_2}{P_2}=...=\frac{dx_n}{P_n}=\frac{\lambda_1 dx_1+\lambda_2 dx_2+...+\lambda_n dx_n}{\lambda_1 P_1+\lambda_2 P_2+...+\lambda_n P_n}$$

unde $\lambda_k(x_1,...,x_n)$ sunt funcții arbitrare continue în D.

Definiția 2. Un sistem de n funcții $\lambda_1(x_1,x_2,...,x_n),...,\lambda_n(x_1,x_2,...,x_n)$ continue pe în D care îndeplinesc condițiile

$$\lambda_1 dx_1+\lambda_2 dx_2+...+\lambda_n dx_n=d\Phi,$$

$$\lambda_1 P_1+\lambda_2 P_2+...+\lambda_n P_n=0$$

pentru orice $(x_1,x_2,...,x_n)\in D$, se numeşte *o combinație integrabilă* a sistemului (1) în D.

Funcția $\Phi(x_1,x_2,...,x_n)=C$ a cărei diferențială totală în D este $\lambda_1 dx_1+\lambda_2 dx_2+...+\lambda_n dx_n$ este o *integrală primă* a sistemului (1). Dacă se determină *n-1* combinații integrabile distincte, se obțin *n-1* integrale prime, care dau soluția generală a sistemului (1) sub forma (2).

Exemplu. Folosind metoda combinațiile integrabile, să se determine soluția sistemului

$$\frac{dx_1}{x_3-x_2}=\frac{dx_2}{x_1-x_3}=\frac{dx_3}{x_2-x_1}$$. determine soluția sistemului

Sistemul dat poate fi scris sub forma:

$$\frac{dx_1}{x_3-x_2}=\frac{dx_2}{x_1-x_3}=\frac{dx_3}{x_2-x_1}=\frac{dx_1+dx_2+dx_3}{0}=\frac{x_1dx_1+x_2dx_2+x_3dx_3}{0}$$

De aici rezultă că $d(x_1+x_2+x_3) = 0$ şi $x_1dx_1+ x_2dx_2 + x_3dx_3= 0$. Soluţia generală va fi formată din două integrale prime: $x_1+x_2+x_3 = C_1$ şi $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = C_2$.

11. Ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi liniare şi omogene. Sistem caracteristic. Soluţie generală. Exemplu.

Definiţia 1. O relaţie de forma

$$(1) \qquad P_1(x_1, x_2,..., x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + P_2(x_1, x_2,..., x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2} + ... + P_n(x_1, x_2,..., x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$$

cu $P_k(x_1, x_2,..., x_n)$, $k = \overline{1,n}$ continue şi neanulându-se simultan într-un domeniu $D \subset \mathbf{R}^n$, se numeşte ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi, liniară şi omogenă, dacă se cere să se determine funcţia $u=f(x_1,x_2,…,x_n)$ având derivatele parţiale de ordinul întâi continue, care verifică (1).

Definiţia 2. Sistemul simetric

$$(2) \qquad \frac{dx_1}{P_1(x_1, x_2,..., x_n)} = \frac{dx_2}{P_2(x_1, x_2,..., x_n)} = ... = \frac{dx_n}{P_n(x_1, x_2,..., x_n)}$$

definit în D se numeşte *sistem caracteristic* al ecuaţiei cu derivate parţiale (1).

Problema integrării ecuaţiei diferenţiale (1) se reduce la problema integrării sistemului caracteristic (2), aşa după cum reiese din următoarea:

Teoremă. Fie $\varphi(x_1,x_2,...,x_n) = C$ o integrală primă a sistemului caracteristic (2); funcţia $u = \varphi(x_1,x_2,...,x_n)$ este o soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale (1).

Demonstraţie. Integrala primă $\varphi(x_1,x_2,...,x_n) = C$ are diferenţiala nulă de-a lungul unei curbe integrale a sistemului (2):

$$(3) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}dx_n = 0$$

Însă de-a lungul unei curbe integrale diferenţialele $dx_1,dx_2,…,dx_n$, sunt proporţionale cu $P_1,P_2,…,P_n$, conform relaţiilor (2) deci egalitatea (3) mai poate fi scrisă şi sub forma:

$$(4) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}P_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}P_2 + ... + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}P_n = 0$$

valabilă pentru orice $(x_1,x_2,...,x_n)$ situat pe o curbă integrală a sistemului (2). Egalitatea (4) fiind adevărată pentru orice constantă C, este adevărată pentru orice curbă integrală a sistemului (2) situată în D; prin urmare $u=\varphi(x_1,x_2,...,x_n)$ este o soluție a ecuației (1) în D. Teorema este demonstrată.

Are loc urmatoarea:

<u>Teoremă</u>. Fie ecuația cu derivate parțiale (1). Fie *n-1* integrale prime (independente) ale sistemului caracteristic (2), $\varphi_k(x_1,x_2,...,x_n)=C_k, k=\overline{1,n-1}$. Funcția $u(x_1,x_2,..., x_n)$ dată de:

$$u(x_1,x_2,...,x_n)=\Phi\left[\varphi_1(x_1,x_2,...,x_n),\varphi_2(x_1,x_2,...,x_n),...,\varphi_{n-1}(x_1,x_2,...,x_n)\right]$$

este o soluție a ecuației cu derivate parțiale (1).

Exemplu. Să se determine soluția generală a ecuației

$$x^2\frac{\partial u}{\partial x}-xy\frac{\partial u}{\partial y}+y^2\frac{\partial u}{\partial z}=0\ .$$

Sistemul caracteristic corespunzător este

$$\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{-xy}=\frac{dz}{y^2}\ .$$

Din $\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{-xy}$ rezultă integrala primă $xy=C_1$, iar din egalitatea $\frac{dy}{-xy}=\frac{dz}{y^2}$ obținem ținând seama de prima integrală $y^3+3xyz=C_2$. Astfel sistemul caracteristic are integralele prime

$$\begin{cases} xy=C_1 \\ y^3+3xyz=C_2 \end{cases}.$$

Soluția generală a ecuației este

$u=\varphi(xy,y^3+3xyz)$, unde φ este o funcție arbitrară derivabilă.

12. <u>Ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi cvasiliniare. Exemplu.</u>

O ecuație diferențială cu derivate parțiale de ordinul întâi cvasiliniare este de forma:

$$(1)\ P_1(x_1,x_2,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+P_2(x_1,x_2,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_2}+...+P_n(x_1,x_2,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=P_{n+1}(x_1,x_2,...,x_n,u)$$

Pentru determinarea soluțiilor unei ecuații cu derivate parțiale cvasiliniare (1) se procedează astfel:

a) Se scrie sistemul caracteristic corespunzător ecuației (1), adică:

(2) $$\frac{dx_1}{P_1}=\frac{dx_2}{P_2}=...=\frac{dx_n}{P_n}=\frac{du}{P_{n+1}}$$

b) Folosind metoda combinațiilor integrale se determină n integrale prime:

(3) $$F_k(u,x_1,x_2,...,x_n)=C_k,\ k=\overline{1,n}$$

c) Soluția generală a ecuației cvasiliniare (1) este dată sub forma implicită de relația:

(4) $$\Phi(F_1,F_2,...,F_n)=0$$

Exemplu. Să se determine soluția generală a ecuației cu derivate parțiale

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=u-\sqrt{u^2+x^2+y^2}$$

Ataşăm sistemul caracteristic:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{du}{u-\sqrt{u^2+x^2+y^2}}$$

Avem:

$$\frac{xdx+ydy+udu}{x^2+y^2+u^2-u\sqrt{u^2+x^2+y^2}}=\frac{du}{u-\sqrt{u^2+x^2+y^2}}$$

sau

$$\frac{xdx+ydy+udu}{\sqrt{x^2+y^2+u^2}\left(\sqrt{u^2+x^2+y^2}-u\right)}=\frac{du}{u-\sqrt{u^2+x^2+y^2}}$$

de unde

$$\frac{xdx+ydy+udu}{\sqrt{x^2+y^2+u^2}}=-du$$

Avem astfel o integrală primă: $\sqrt{x^2+y^2+u^2}+u=C_1$.

Din egalitate primelor două rapoarte ale sistemului caracteristic, avem şi a doua integrală primă: $\frac{x}{y}=C_2$. Soluția generală este:

$$\Phi\left(\frac{x}{y},\sqrt{x^2+y^2+u^2}+u\right)=0 \text{ sau } \sqrt{x^2+y^2+u^2}+u=f\left(\frac{x}{y}\right).$$

13. Probleme propuse.

1. Să de integreze ecuația diferențială de ordinul întâi liniară:

$$y' - y\, tgx = \frac{1}{\cos\ x},\ y(0) = 0$$

2. Să se integreze ecuația diferențială omogenă generalizată**:**

$$(3x\text{-}7y\text{-}3)y' + 7x\text{-}3y\text{-}7 = 0.$$

3. Să se integreze ecuația diferențială a lui Bernoulli:

$$y'\text{-}\frac{1}{x}y = \text{-}2xy^2,\quad y(1) = 1.$$

4. Să se integreze ecuația diferențială a lui Riccati:

$$a)\, y' + y^2 + \frac{4}{x}y + \frac{2}{x^2} = 0, y_p = \frac{a}{x}(a > 0).$$

$$b)\, y' + y^2 \sin x = \frac{2\sin x}{\cos^2 x}, y_p = \frac{1}{\cos x}.$$

5. Să se integreze ecuația diferențială a lui Clairaut şi Lagrange:

$$a)\, y = xy' + \frac{1}{y'};$$

$$b)\, y = (1 + y')x + y'^2\ .$$

6. Să se integreze ecuațiile diferențiale liniare de ordin superior cu coeficienți constanți omogene:

$a)\ y''-y = 0,\ y(0)\ = 2,\ y'(0) = 0;$

$b)\ y^{(4)} - 5y''+4y = 0;$

$c)\ y^{(3)}\text{-}6y''+11y'-6y = 0;$

$d)\ y^{(3)} - 3y''+3y'-y = 0;$

$e)\ y^{(4)} - y = 0;$

$f)\ y^{(5)} + 4y^{(3)} = 0.$

7. Să se integreze ecuațiile diferențiale liniare de ordin superior cu coeficienți constanți neomogene:

a) $y''-5y'+6y=6x^2-10x+2$;

b) $y^{(4)}-y^{(3)}-y'+y=e^x$.

$c) y^{(4)}-y=3e^x-5\cos x+2x^2$.

8. Să se integreze ecuația de tip Euler: $x^2y''-2xy'+2y=x$.

9.Folosind metoda variației constantelor,să se integreze ecuația:

$$y''-y=\frac{1}{\cos x}\ .$$

10.Să se rezolve sistemele de ecuații diferențiale:

a) $\begin{cases} x'+4x+4y=0 \\ y'+2x+6y=0 \end{cases}$, $x(0)=3, y(0)=15, x=x(t), y=y(t)$.

.

b) $\begin{cases} x'=-x+y+z \\ y'=x-y+z \\ z'=x+y-z \end{cases}$, x(0)=0,y(0)=1,z(0)=1, $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$.

11.Folosind metoda combinațiilor integrabile să se determine soluția sistemelor simetrice:

$a)$ $$\frac{dx_1}{x_1(x_2-x_3)}=\frac{dx_2}{x_2(x_3-x_1)}=\frac{dx_3}{x_3(x_1-x_2)};$$

$b)$ $$\frac{dx_1}{x_1}=\frac{dx_2}{x_2}=\frac{dx_3}{x_3-\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}\ ;$$

$c)$ $$\frac{dx_1}{x_1^2-x_2^2-x_3^2}=\frac{dx_2}{2x_1x_2}=\frac{dx_3}{2x_1x_3}\ .$$

12.Să se integreze sistemul de ecuații diferențiale cu derivate parțiale cvasiliniare:

$$2xu\frac{\partial u}{\partial x}+2yu\frac{\partial u}{\partial y}=u^2-x^2-y^2, u\big|_{y=1}=x.$$

CAPITOLUL II

FUNCȚII COMPLEXE

1. Corpul numerelor complexe. Construcția şi reprezentarea numerelor complexe.

Imposibilitatea rezolvării unor ecuații algebrice în corpul numerelor reale **R** a condus pe algebriştii italieni în secolul XVI să introducă noi expresii de forma $a+b\sqrt{-1}$, $a,b \in$ **R**, numite numere imaginare. Numerele "*imaginare*" apar pentru prima oară în lucrările lui Cardan (sec. XVI).
Denumirea de numere imaginare a fost atribuită datorită faptului că în epoca respectivă nu s-a putut da o reprezentare intuitivă a acestor numere. În 1763, Euler întreprinde pentru prima oară un studiu sistematic al acestor numere introducând şi simbolul " i ". În 1797, Gauss dă interpretarea geometrică a numerelor complexe, ca puncte ale unui plan.

Fie $\mathbf{R}^2$ produsul cartezian al perechilor ordonate (x,y) de numere reale. Definim pe $\mathbf{R}^2$ operațiile de adunare şi înmulțire prin :

(1) $(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y')$;

(2) $(x,y)\ (x',y') = (xx'- yy', xy'+x'y)$.

Prin definiție, mulțimea numerelor complexe **C** este mulțimea $\mathbf{R}^2$ dotată cu operațiile de adunare şi înmulțire ($\mathbf{R}^2$,+,.); mulțimea **C** înzestrată cu cele două operații are o structură de corp comutativ. Elementele corpului **C** se numesc numere complexe. Fie **A** mulțimea numerelor complexe de forma (x, 0), deci $\mathbf{A}=\{(x,0), x \in \mathbf{R}\}$. $\mathbf{A} \subset \mathbf{C}$ şi **A** este un subcorp al lui **C** deoarece:

$(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0) \in A$, şi $(x, 0)(y, 0) = (xy, 0) \in A$.

Să definim aplicația f : $\mathbf{R} \to \mathbf{A}$ prin $f(x) = (x, 0)$, $x \in \mathbf{R}$. Această aplicație este o bijecție şi conservă operațiile de adunare şi înmulțire :

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ şi } f(xy)=f(x)f(y) .$$

Rezultă că f este un izomorfism de corpuri de la **R** pe **A**. Acest lucru permite identificarea mulțimii **A** cu **R**. Astfel vom nota numărul complex (x,0) cu x deci (x, 0) = x. În particular, zeroul (0,0) şi unitatea (1,0) din corpul numerelor complexe se identifică cu numărul real 0 şi unitatea reală 1. În consecință putem scrie (0,0) = 0 şi (1,0) = 1.

Fie B $=\{(0.y), y\in\mathbf{R}\}\subset\mathbf{C}$. Observăm că B se poate identifica cu punctele din R^2 situate pe axa Oy. Observăm că :

$$(0, y) + (0,y') = (0, y+y') \in B$$

şi $$(0,y)\ (0,y') = (-yy', 0) \notin B.$$

Aceasta arată că B nu este un subcorp al corpului numerelor complexe C. În particular,

$$(0,1)\ (0,1) = (-1,0) = -1\ .$$

Vom nota i = (0,1) şi astfel $i^2 = -1$, xi = (0, x), x R. Numărul complex i se mai numeşte şi *unitate imaginară*, iar numerele complexe de forma xi ($x\in R$), numere *pur imaginare.*

Dacă z = (x,y) este un număr complex oarecare, atunci :

$$z = (x,y) = (x,0) + (0,y) = x + iy,$$

care reprezintă expresia algebrică a numerelor complexe. În această scriere, x = Re z şi y = Im z reprezintă respectiv partea reală şi partea imaginară a numărului complex z.

Prin *modulul* numărului complex z = x + iy se înţelege numărul nenegativ definit prin relația :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}\ .$$

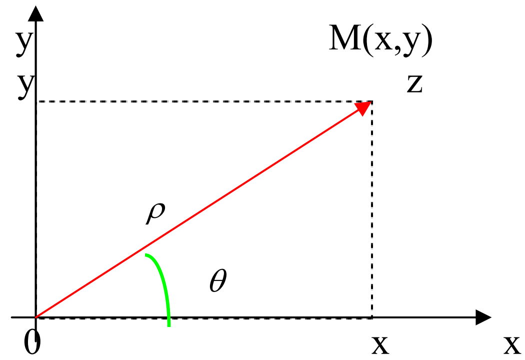
Prin *conjugatul* unui număr complex z = x + iy se înțelege numărul $\bar{z}$ = x - iy. În afară de această reprezentare geometrică *punctuală* mai este cunoscută şi reprezentarea *vectorială* a numerelor complexe. Astfel, numărului complex z = x + iy, i se ataşează vectorul liber ale cărui componente pe axele de coordonate sunt x şi y . În acest fel se realizează o bijecție între corpul **C** şi mulțimea vectorilor liberi.

Scrierea numerelor complexe sub formă trigonometrică. Operații cu numere complexe.

În calculul cu numere complexe este foarte utilă scrierea acestora sub formă trigonometrică. Numărul complex z = x + iy se poate scrie sub formă trigonometrică :

(1) $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ unde $\rho = |z|, tg\theta = \dfrac{y}{x}\ , x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$.

Unghiul făcut de vectorul corespunzător lui z cu sensul pozitiv al axei Ox se numeşte *argument* şi se notează : $\theta = \arg z$



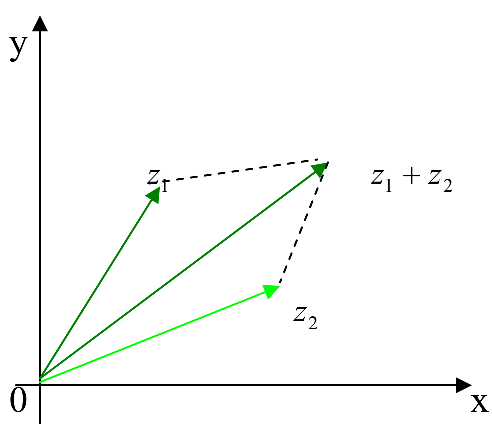
Aceluiaşi număr complex z, z≠0, îi corespund o infinitate de determinări ale argumentului, care diferă între ele printr-un multiplu de 2π. Vom numi *determinare principală* a argumentului lui z, z≠ 0, notată arg z, acea determinare care verifică inegalitățile :

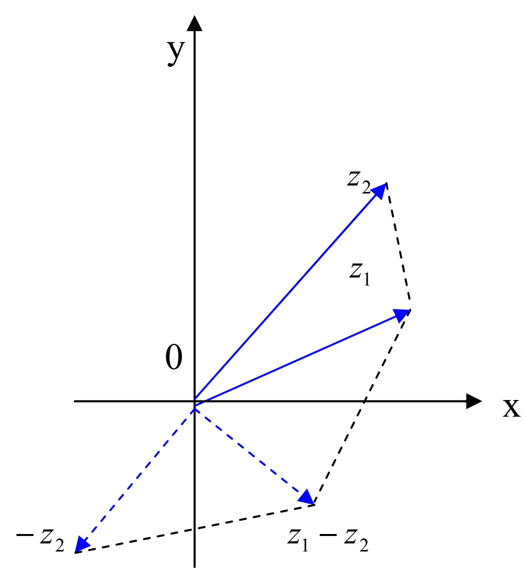
$$-\pi < \arg z \le \pi.$$

Adunarea (respectiv scăderea) numerelor complexe $z_1 = x_1 + iy_1$ şi $z_2 = x_2 + iy_2$ se definesc prin :

(2) $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$

Aceste operații au ca semnificație geometrică adunarea respectiv scăderea vectorilor corespunzători :





Se observă că $|z_1 - z_2|$ reprezintă distanța dintre punctele z_1 şi z_2

Fie $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ şi $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$. Înmulțirea numerelor complexe z_1 şi z_2 se defineşte astfel :

(3) $z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$.

Observăm că $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ şi $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$.

Dacă $z_k \in C$, $z_k = \rho_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$, $k \in \{1,2,...,n\}$ atunci :

(4) $z_1 z_2 ... z_n = \rho_1 \rho_2 ... \rho_n [\cos(\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n)]$.

Dacă $z_1 = z_2 = ... = z_n = z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ atunci :

(5) $z^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$.

Dacă luăm pe $\rho = 1$ se obține *formula lui Moivre :*

(6) $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.

Împărțirea numerelor complexe z_1, z_2 se efectuează după regula :

(7) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$.

Observăm că : $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ şi $\arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$.

Rădăcina de ordinul *n* se defineşte astfel :

(8) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n})$, $k \in \{0,1,2,...,n-1\}$.

Din punct de vedere geometric, cele n rădăcini ale lui z sunt vârfurile unui poligon regulat cu n laturi înscris în cercul cu centrul în origine şi de rază $\sqrt[n]{\rho}$.

O formă importantă de reprezentare a numerelor complexe se datorează lui Euler. Notând $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ (formula lui Euler), numărul complex z se poate scrie sub forma: $z = \rho e^{i\theta}, \rho = |z|, \theta = \arg z$ numită *forma exponențială* a numerelor complexe.

2. Elemente de topologie în corpul numerelor complexe.Proiecția stereografică.

Fie C mulțimea numerelor complexe. Aplicația d : **C**X**C**→**R** definită prin :

(1) $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbf{C}$,

se numeşte *metrică* sau *distanță* pe mulțimea C.

În continuare nu vom face deosebire între numărul complex z şi punctul M(z), imaginea lui geometrică din planul Gauss.

Definiția 1 . Vom numi *disc deschis* cu centrul în punctul a∈C şi de rază r >0 mulțimea :

(2) $\Delta(a, r) = \{z \in \mathbf{C}, |z - a| < r\}$.

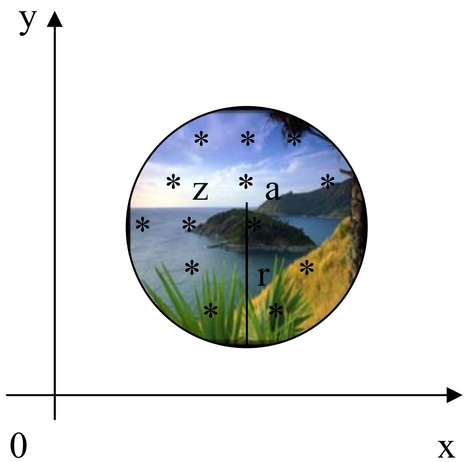
Prin *disc închis* cu centrul în $a \in C$ şi de rază $r > 0$ vom înțelege mulțimea :

(3) $\overline{\Delta(a,r)} = \{z \in \mathbf{C},\ |z-a| \le r\}$.

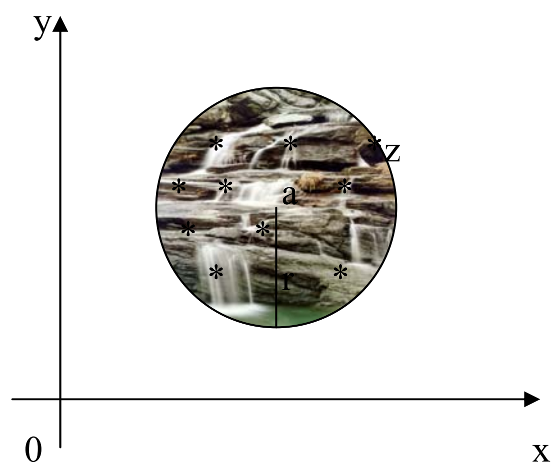
<u>Definiția 2.</u> Numim *cerc* cu centrul în a şi de rază r >0 mulțimea :

(4) $S(a,r) = \{z \in \mathbf{C},\ |z-a| = r\}$.

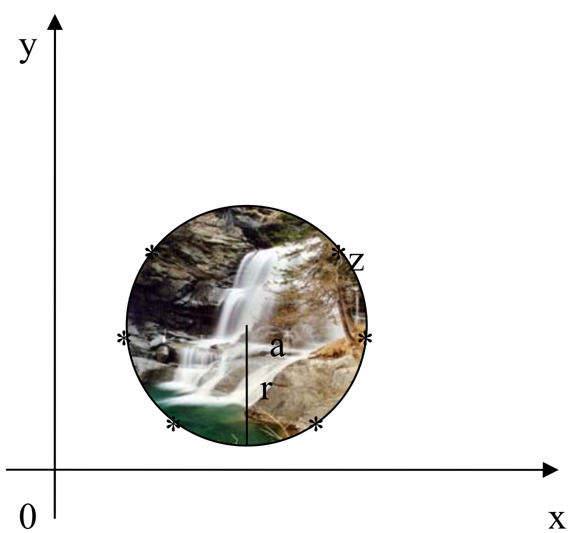
Mai jos sunt reprezentate cele trei mulțimi:



$\Delta(a,r)$



$\overline{\Delta(a,r)}$



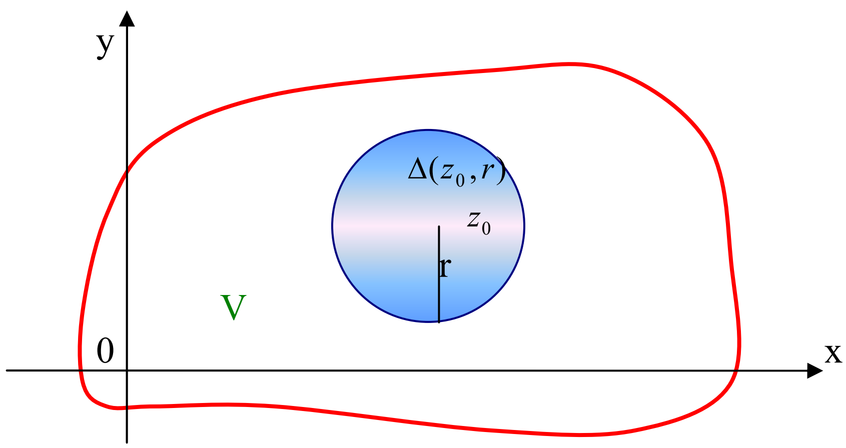
$S(a,r)$

Mulțimea C pe care s-a definit metrica d este un spațiu metric. Pe mulțimea C, relativ la distanța d vom introduce topologia τ_d, numită topologia asociată distanței d.

Mulțimea de părți τ_d a spațiului metric (C, d) definită prin :

(5) $$\tau_d = \{U \in P(C); \forall z \in U, \exists r > 0, \Delta(z,r) \subset U\}$$,

unde P(C) reprezintă mulțimea tuturor părților mulțimii C, este o topologie pe (C,d), numită *topologia asociată distanței d* .



Definiția 3. Submulțimea V se numeşte vecinătate a unui punct $z_0 \in C$ dacă există discul $\Delta(z_0, r) \subset V$ (figura de mai sus).`

Dacă $V \subset C$ este o vecinătate a lui $z_0 \in C$, atunci punctul z_0 se numeşte *punct interior* lui V. Mulțimea punctelor interioare ale unei mulțimi V se numeşte interiorul lui V şi se notează cu $\overset{0}{V}$ sau $IntV$.

Punctul z_0 este un *punct de acumulare* pentru mulțimea V dacă orice disc $\Delta(z_0, r)$ conține un punct $z \neq z_0$ astfel încât : $V \cap (\Delta(z_0, r) \setminus \{z_0\}) \neq \emptyset$. Mulțimea punctelor de acumulare o vom nota cu V' şi o vom numi *mulțimea derivată a lui* V.

Dacă $z_0 \in V$ şi există $\Delta(z_0, r)$ astfel încât $\Delta(z_0, r) \cap V = \{z_0\}$, atunci punctul z_0 este un *punct izolat* al mulțimi V.

Închiderea mulțimi V reprezintă mulțimea $\overline{V} = V \cup V'$. O mulțime V este *deschisă* dacă V=$\overset{0}{V}$.

Mulțimea V este *închisă* dacă $V \supset V'$. Se poate arăta că V este închisă $\Leftrightarrow V = \overline{V}$.

Mulțimea $V \subset C$ este o mulțime *mărginită* dacă există discul $\Delta(0, r)$ astfel încât $V \subset \Delta(0, r)$.

O mulțime mărginită şi închisă se numeşte *compactă*.

Un punct $z_0 \in C$ se numeşte *punct frontieră* pentru mulțimea $A \subset C$ dacă orice vecinătate V a punctului z_0 conține puncte atât din mulțimea A cât şi din complementara sa C(A). Mulțimea punctelor frontieră a mulțimii A se notează Fr A şi se numeşte *frontiera lui A*.

Dacă cel puțin unul din numerele x =Re z , y =Im z este infinit, vom scrie $z = \infty$ şi vom spune că reprezintă punctul de la infinit al planului complex.

<u>Definiția 4.</u> Numim *vecinătate* a punctului $z = \infty$ exteriorul unui cerc cu centrul în origine, adică mulțimea :

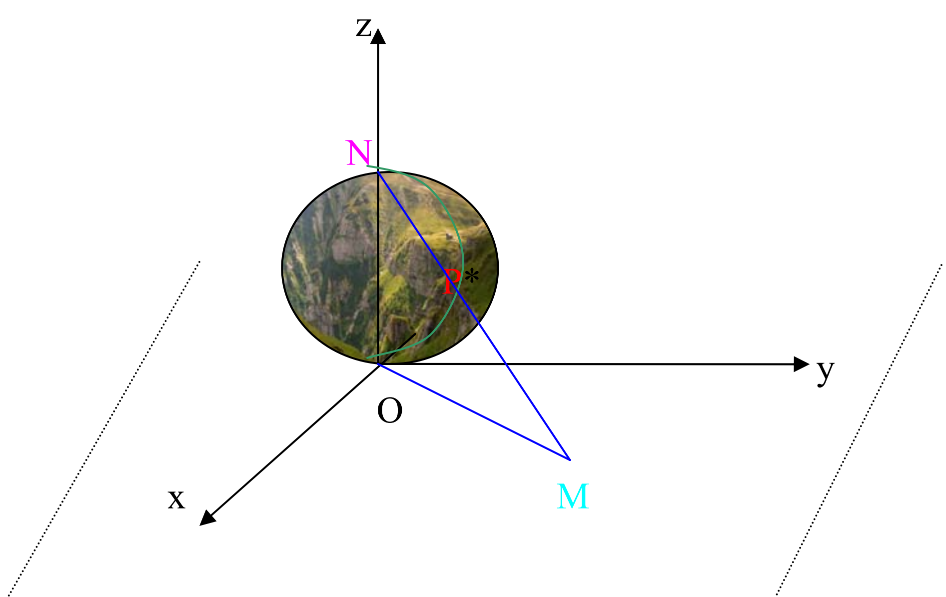
(6) $$V_\infty = \{z \in C, |z| > r\}.$$

Pentru a obține imaginea geometrică a punctului $z = \infty$ al planului complex vom defini *proiecția stereografică*, care stabileşte o corespondență biunivocă între punctele unei sfere şi punctele planului complex al lui Gauss. Această corespondență a fost indicată de B. Riemann.

Să considerăm o sferă S de diametru 1 tangentă în punctul O la planul euclidian raportat la sistemul de axe rectangulare Oxy în care am reprezentat numerele complexe . Fie N punctul de pe sfera S diametral opus lui O.

Vom considera spațiul euclidian tridimensional raportat la sistemul de axe rectangulare $O_{\xi\eta\varsigma}$ unde O_ξ şi O_η coincid cu Ox respectiv cu Oy, iar axa O_ς se suprapune peste diametrul ON, N (0,0,1).

Fie M un punct oarecare din planul Oxy de afix z = x + iy şi să notăm cu P = P(ξ, η, ς) punctul diferit de N unde dreapta MN taie sfera S :



În acest fel, fiecărui punct M din plan (sau fiecărui număr complex $z \in C$) îi va corespunde un punct unic P al sferei S, P$\neq$N. Invers, dându-se un punct P, P$\in$S, P$\neq$N, dreapta care trece prin N şi P va intersecta planul Oxy într-un punct unic M.

Vom spune că punctul M este *proiecția stereografică* (din N) al punctului P. Relațiile dintre coordonatele punctului P(ξ,η,ς) şi coordonatele punctului M(x, y) sunt :

$$(7) \qquad \xi=\frac{x}{1+x^2+y^2};\eta=\frac{y}{1+x^2+y^2};\varsigma=\frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2} .$$

Când $|z|\to\infty$, atunci P$\to$N deci proiecția stereografică a polului nord N este punctul de la infinit $z=\infty$ al planului complex $\xi=0$. Mulțimea numerelor complexe C împreună cu punctul $z=\infty$ reprezintă închiderea lui C , deci $\overline{C}=C\cup\{\infty\}$.

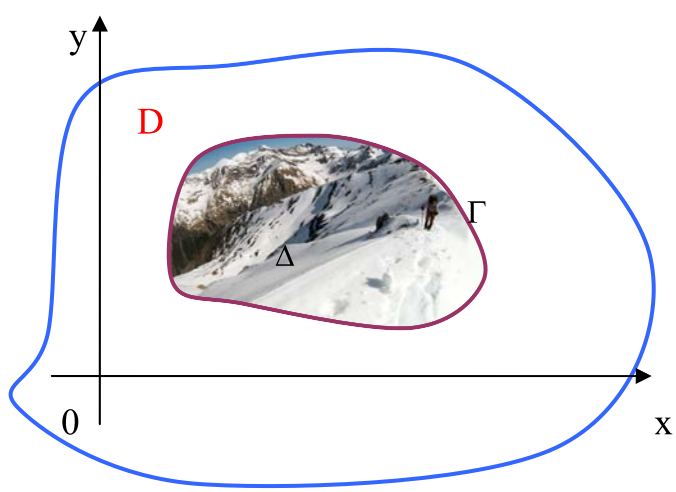
<u>Definiția 5</u>. Mulțimea E$\subset$C este *convexă*, dacă pentru orice descompunere în două mulțimi disjuncte şi nevide A şi B cel puțin una din aceste mulțimi are un punct de acumulare în cealaltă mulțime, deci :

$$A\cup B=E, A\cap B=\emptyset, A\cap B' \neq\emptyset \text{ sau } A'\cap B\neq\emptyset .$$

Dacă o mulțime este deschisă şi convexă, vom spune că acea mulțime este un *domeniu*.

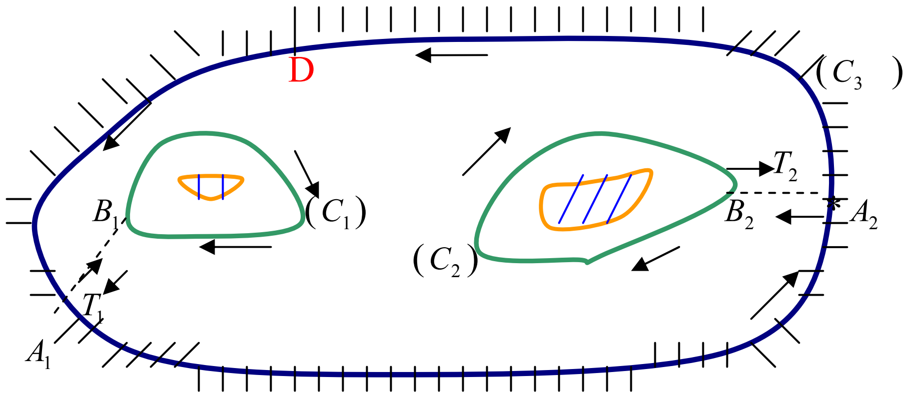
O mulțime deschisă este convexă dacă şi numai dacă oricare două puncte ale sale pot fi unite printr-o linie poligonală conținută în acea mulțime.

<u>Definiția 6</u>. Un domeniu $D\subset C$ este *simplu conex,*dacă orice curbă simplă închisă Γ, conținută în D, delimitează un domeniu mărginit Δ având frontiera Γ,este inclus în D,adică $\Delta\subset D$:



Un domeniu care nu este simplu conex vom spune că este *multiplu conex*. Prin introducerea unor tăieturi, adică noi frontiere, domeniul poate deveni simplu conex. Ordinul de conexiune se obține adăugând o unitate la numărul minim de tăieturi pentru ca domeniul respectiv să devină simplu conex.

Exemplu. Domeniul D din figura de mai jos este triplu conex :



Prin tăieturile T_1 și T_2 el devine un domeniu simplu conex având ca frontieră mulțimea :

$$\Gamma = (C_1) \cup (C_2) \cup (C_3) \cup (\overset{\frown}{A_1 B_1}) \cup (\overset{\frown}{B_1 A_1}) \cup (\overset{\frown}{A_2 B_2}) \cup (\overset{\frown}{B_2 A_2})..$$

3. Șiruri și serii de numere complexe.

A. Șiruri de numere complexe.

Definiția1. Numim șir de numere complexe aplicația $f : N^* \to C, f(n) = x_n + iy_n, x_n \in$ R, $y_n \in$ R. Vom nota : $(z_n)_{n\in N^*}$ sau simplu (z_n).

Spunem că șirul (z_n) este *mărginit* dacă $\exists c \in R_+$ astfel încât : $|z_n| \le c, \forall n \in$ N*.

Definiția 2. (cu vecinătăți) Spunem că șirul (z_n) este convergent dacă există un $z \in C$ astfel încât în afara oricărei vecinătăți V a lui z se află un număr finit de termeni ai șirului. Notăm $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ sau $z_n \to z, n \to \infty$.

Definiția 3. (cu ε) Spunem că (z_n) este convergent dacă există un $z \in C$ astfel încât pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_\varepsilon \in$ N cu proprietatea că pentru orice n$\in$N, $n \ge n_\varepsilon$ să avem :

$$|z_n - z| < \varepsilon .$$

Geometric definiția 3 are următoarea interpretare : toți termenii z_n cu $n \geq n_\varepsilon$ se află în interiorul cercului cu centrul în z şi de raza ε .

<u>Teorema 1.</u> Un şir $z_n = x_n + iy_n$ este convergent dacă şi numai dacă (x_n) şi (y_n) sunt convergente; în plus, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + i \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

<u>Demonstrație.</u> Dacă z_n este convergent, atunci $\exists z = x + iy \in C$ astfel încât pentru $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in N$ astfel încât $\forall n \geq n_\varepsilon$ să avem $|z_n - z| < \varepsilon$. Dar $|x_n - x| \leq |z_n - z| < \varepsilon$ şi $|y_n - y| \leq |z_n - z| < \varepsilon$, de unde urmează că x_n şi y_n sunt convergente către x şi respectiv y şi deci $z_n \to x + iy$.

Reciproc, dacă $x_n \to x$ şi $y_n \to y$ obținem $z_n \to z$.

<u>Definiția 4.</u> Şirul (z_n) de numere complexe se numeşte *şir Cauchy* (*fundamental*), dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr natural $n\ (\varepsilon)$ astfel încât pentru orice $n > n(\varepsilon)$ şi orice $p \in N$, să avem :

(1) $$|z_{n+p} - z_n| < \varepsilon .$$

Are loc:

<u>Teorema 2.</u> Condiția necesară şi suficientă ca un şir (z_n) să fie şir Cauchy este ca şirurile (x_n) şi (y_n) să fie şiruri Cauchy.

Necesitatea condiției rezultă din inegalitățile :

$$|x_{n+p} - x_n| \leq |z_{n+p} - z_n| \quad \text{şi} \quad |y_{n+p} - y_n| \leq |z_{n+p} - z_n|$$

iar suficiența din inegalitatea :

$$|z_{n+p} - z_n| \leq |x_{n+p} - x_n| + |y_{n+p} - y_n| .$$

<u>B. Serii de numere complexe.</u>

Prin serie de numere complexe înțelegem suma termenilor unui şir (w_n) de numere complexe şi se notează :

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n = w_1 + w_2 + ... + w_n + ... \ .$$

Seriei de numere complexe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ i se asociază *şirul sumelor parțiale* (S_n), definit astfel :

$$S_n = w_1 + w_2 + ... + w_n, n \in \{1,2,3...\} \ .$$

Dacă şirul sumelor parţiale (S_n) este convergent şi are limita S spunem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ este convergentă şi are suma S adică: $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = S$. Dacă şirul ($S_n$) este divergent spunem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ este divergentă.

O serie de numere complexe poate fi scrisă :

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + i\sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ , unde } u_n, v_n \in R \text{ .}$$

Are loc :

<u>Teorema 1.</u> O serie de numere complexe $\sum w_n$ este convergentă dacă şi numai dacă $\sum u_n$ şi $\sum v_n$ sunt convergente.

<u>Demonstraţie.</u> Notăm $S_n = w_1 + w_2 + .. + w_n, s_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ şi $\tau_n = v_1 + v_2 + ... v_n$. Avem $S_n = s_n + i\tau_n$. Dar $\sum w_n$ este convergentă dacă şi numai dacă şirul (S_n) este convergent ceea ce are loc dacă şi numai dacă şirurile (s_n) şi (τ_n) sunt convergente adică, dacă şi numai dacă seriile $\sum u_n$ şi $\sum v_n$ sunt convergente.

<u>Definiţia 1.</u> Seria $\sum w_n$ se numeşte *absolut convergentă* dacă seria $\sum |w_n|$ este convergentă.

<u>Definiţia 2.</u> Dacă seria $\sum w_n$ este convergentă iar $\sum |w_n|$ este divergentă, seria $\sum w_n$ se numeşte *semi-convergentă*.

Observaţie. O serie absolut convergentă este convergentă dar reciproca nu este în general valabilă .

O serie de numere complexe este absolut convergentă dacă şi numai dacă atât seria părţilor reale cât şi seria părţilor imaginare sunt absolut convergente.

Observație. Pentru studiul convergenței absolute a seriilor de numere complexe se utilizează criteriile de convergență pentru serii cu termenii pozitivi.

Pentru studiul naturii seriilor de numere complexe pot fi utilizate criteriile de convergență pentru seriile de numere reale.

4. Funcții complexe de o variabilă reală. Limita într-un punct. Continuitate. Derivata şi diferențiala. Integrala Riemann. Primitivă.

Fie $E \subset$ R .

Definiția 1. Numim *funcție complexă de variabilă reală* , aplicația :

(1) f: $E \subset$ R→C sau

(2) f(t) = x(t) + i y(t) , $t \in$ R unde x(t)= Re f(t) şi y(t) = Im f(t)

.

Rezultă că o funcție complexă de variabilă reală este determinată de o pereche ordonată x = x(t) şi y = y(t), $t \in$ E de funcții reale de variabilă reală.

Definiția 2. Spunem că un număr complex $l \in$ C este limita funcției f(t) în punctul $t_0 \in$ E' dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $\eta(\varepsilon) > 0$ astfel încât oricare ar fi $t \in$ E , $t \neq t_0$, dacă $|t - t_0| < \eta(\varepsilon)$ atunci $|f(t) - l| < \varepsilon$. Se scrie $\lim_{t \to t_0} f(t) = l$

Are loc:

Propoziția 1. $\lim_{t \to t_0} f(t) = l \Leftrightarrow \lim_{t \to t_0} x(t) = \mathrm{Re}\, l$ şi $\lim_{t \to t_0} y(t) = \mathrm{Im}\, l$.

Definiția 3. Spunem că funcția complexă f(t) este continuă în punctul $t_0 \in E \subset$ R , dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru $|t - t_0| < \eta(\varepsilon), t \in E$ să avem : $|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$

Dacă $t_0 \in E \cap E^{/}$, atunci funcția complexă f(t) este continuă în punctul $t_0 \Leftrightarrow \lim_{t \to t_0} f(t) = f(t_0)$.

Propoziția 2. Condiția necesară şi suficientă pentru ca funcția complexă f(t) = x(t) + i y(t) să fie continuă în punctul $t_0 \in E \subset$ R este ca funcțiile reale x(t)şi y(t) să fie continue în t_0.

Fie $f : E \subset R \to C$ şi $t_0 \in E \cap E^{/}$

Definiția 4. Spunem că funcția complexă f este *derivabilă* în punctul t_0 dacă există şi este finită limita :

(3) $$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} .$$

Valoarea acestei limite se notează $f^{/}(t_0)$ sau $\frac{df(t_0)}{dt}$ şi se numeşte derivata funcției f în punctul $t_0 \in E$.

Propoziția 3. Condiția necesară şi suficientă ca o funcție complexă f să fie derivabilă într-un punct este ca funcțiile reale x(t) şi y(t) să fie derivabile în acel punct.

Se poate scrie :

$$\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0} + i\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}, t \in E \setminus \{t_0\}$$, de unde

trecând la limită când $t \to t_0$, obținem egalitatea :

(4) $$f^{/}(t_0) = x^{/}(t_0) + iy'(t_0).$$

Menționăm că regulile de derivare pentru funcțiile reale se păstrează şi în cazul funcțiilor complexe de variabilă reală.

Fie f o funcție complexă derivabilă pe $E \subset$ R .

Prin *diferențiala* lui f în punctul $t_0 \in E$ vom înțelege numărul complex:

(5) $$df(t_0) = f^{/}(t_0)\cdot dt, dt = t - t_0.$$

Explicitând, relația (5) poate fi scrisă şi astfel :

(6) $df(t) = dx(t) + idy(t)$, unde $dx(t) = x^{/}(t)dt$ şi $dy(t) = y^{/}(t)dt$

Regulile de diferențiere cunoscute pentru sumă, produs şi cât se păstrează şi pentru funcțiile complexe.

Definiția integralei Riemann pentru funcțiile complexe de variabilă reală este analoagă cu cea dată pentru funcțiile reale.

Fie funcția complexă $f(t), t \in [a,b] \subset$ R.

Să considerăm o diviziune d a lui $[a,b]$ prin punctele:

$$d : t_0 = a < t_1 < t_2 < ... < t_{k-1} < t_k < ... < t_n = b.$$

Notăm $\delta_k = [t_{k-1}, t_k]$, unde $k \in \{1,2,3,...,n\}$. Prin *norma* diviziunii d, notată $\gamma(d)$, se înțelege numărul real :

(7) $$\gamma(d) = \max_{1\le k\le n}(t_k - t_{k-1}).$$

Funcției complexe f şi diviziunii d a compactului [a ,b] li se asociază numărul complex τ_d, numit sumă integrală Riemann, având expresia :

(8) $\tau_d(f) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(t_k - t_{k-1})$ unde punctele $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$ $k \in \{1,2,3,...,n\}$ se numesc puncte intermediare ale diviziunii d a lui [a, b].

Definiția 5. Funcția complexă f(t), $t \in [a,b]$ este integrabilă pe [a, b], dacă există un număr complex I cu proprietatea următoare : pentru orice

$\varepsilon > 0$ există un număr $\eta(\varepsilon) > 0$, astfel încât, oricare ar fi diviziunea d cu $\upsilon(d) < \eta(\varepsilon)$ şi oricare ar fi alegerea punctelor intermediare ξ_k , să avem :

$$(9) \qquad |I - \tau_d(f)| < \varepsilon \ .$$

Numărul I se notează $\int_a^b f(t)dt$ şi se numeşte integrala funcției f(t) pe intervalul [a, b]. În cazul când integrala există vom scrie :

$$(10) \qquad I = \int_a^b f(t)dt = \lim_{\upsilon(d)\to 0} \tau_d(f)$$

<u>*Propoziția 4.*</u> Funcția complexă f(t) este integrabilă pe [a, b] dacă şi numai dacă funcțiile reale x(t) şi y(t) sunt integrabile pe [a, b].Aceasta rezultă imediat din inegalitățile :

$$\left.\begin{matrix} |\mathrm{Re}\, I - \tau_d(x(t))| \\ |\mathrm{Im}\, I - \tau_d(y(t))| \end{matrix}\right\} \leq |I - \tau_d(f)| \leq |\mathrm{Re}\, I - \tau_d(x(t))| + |\mathrm{Im}\, I - \tau_d(y(t))| \text{ , deoarece}$$

$$\tau_d(f) = \tau_d(x(t)) + i\tau_d(y(t)).$$

Din egalitatea de mai sus, găsim formula :

$$(11) \qquad \int_a^b f(t)dt = \int_a^b x(t)dt + i\int_a^b y(t)dt \ .$$

Proprietățile integralei Riemann au loc şi pentru funcțiile complexe.

<u>**Definiția 6**</u>. Spunem că funcția complexă F(t), t$\in$[a, b], este primitiva lui f(t), t$\in$[a, b], dacă F(t) este derivabilă pe [a, b] şi F'(t)=f(t) , t$\in$[a, b].

Dacă o funcție f are o primitivă F, atunci are o infinitate de primitive, anume mulțimea: F(t)+C, t$\in$ [a, b], $C\in$C. Această mulțime a primitivelor lui f se numeşte integrala nedefinită a funcției f care se notează :

$$(9) \qquad \int f(t)dt = F(t) + C \ .$$

În particular, dacă funcția f este continuă pe [a, b], atunci funcția complexă $\int_a^t f(\tau)d\tau$ este primitivă pentru funcția f pe [a, b] şi F'(t) = f(t), t$\in$[a, b]. Ca şi în cazul funcțiilor reale se arată că :

$$(10) \qquad \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = F(t)\Big|_a^b \ ,$$

care constituie formula Leibniz-Newton pentru integrala definită a unei funcții complexe.

<u>5. Funcții monogene. Derivata unei funcții complexe. Condițiile de monogeneitate a lui Cauchy-Riemann. Proprietăți.</u>

<u>Definiția 1.</u> Spunem că funcția complexă definită în domeniul $\mathbf{D}\subset\mathbf{C}$ este derivabilă în punctul $z_0 \in D$, dacă există şi este unică:

(1) $$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}.$$

Valoarea acestei limite se notează $f^{/}(z_0)$ şi se numeşte *derivata* funcției f(z) în punctul $z_0 \in D$. O funcție derivabilă într-un punct se numeşte *monogenă* în acel punct. O funcție monogenă în fiecare punct al domeniului D se numeşte *olomorfă* pe domeniul D sau *monogenă* (monos = unul, genos = a da naştere) pe domeniul D.

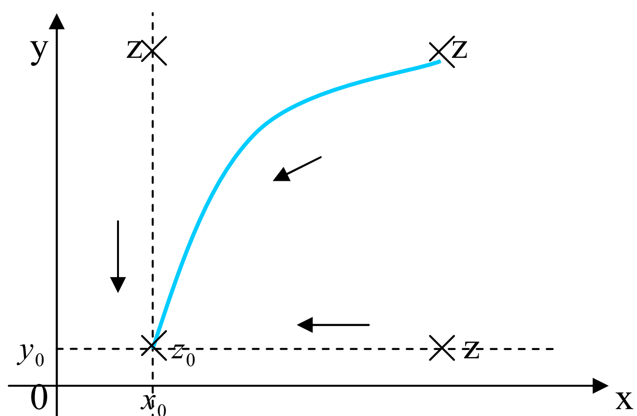
<u>Propoziția 1.</u> (*Condițiile de monogeneitate a lui Cauchy-Riemann*). Pentru ca funcția complexă f(z) = u(x,y) + iv(x,y) definită în domeniul D să fie monogenă în punctul $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$, este necesar ca funcțiile u şi v să admită derivate parțiale de ordinul întâi în punctul (x_0, y_0) şi să satisfacă relațiile:

(2) $$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0),\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)=-\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$$

numite condițiile de monogeneitate ale lui Cauchy-Riemann.

<u>Demonstrație.</u> Pentru $z = x + iy \in D, z \neq z_0$, putem scrie:

(3) $$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{[u(x,y)-u(x_0,y_0)]+i[v(x,y)-v(x_0,y_0)]}{(x-x_0)+i(y-y_0)}$$



Să presupunem că $z \to z_0$ pe un drum paralel cu Ox: $x \longrightarrow x_0$ şi $y = y_0$

Din (3) obținem:

(4) $$f^{/}(z_0)=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{u(x,y_0)-u(x_0,y_0)}{x-x_0}+i\frac{v(x,y_0)-v(x_0,y_0)}{x-x_0}\right].$$

Dar existența derivatei f'(z_0) implică existența limitelor:

(5) $$\lim_{x\to x_0}\frac{u(x,y_0)-u(x_0,y_0)}{x-x_0}=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)$$

şi

(6) $$\lim_{x\to x_0}\frac{v(x,y_0)-v(x_0,y_0)}{x-x_0}=\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0).$$

Din relaţiile (4), (5) şi (6), obţinem:

(7) $$f'(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \quad .$$

Presupunând că $z\to z_0$, pe un drum paralel cu axa imaginară Oy, atunci

$$x=x_0 \text{ şi } y\longrightarrow y_0 \quad .$$

Din (3) obţinem:

(8) $$f'(z_0)=\lim_{y\to y_0}\left[\frac{1}{i}\frac{u(x_0,y\ )-u(x_0,y_0)}{y-y_0}+\frac{v(x_0,y\ )-v(x_0,y_0)}{y-y_0}\right]$$

care implică existenţa limitelor:

(9) $$\lim_{y\to y_0}\frac{u(x_0,y\ )-u(x_0,y_0)}{y-y_0}=\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$$

şi

(10) $$\lim_{y\to y_0}\frac{v(x_0,y\ )-v(x_0,y_0)}{y-y_0}=\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0).$$

Din (8), (9) şi (10) găsim:

(11) $$f'(z_0)\ =\frac{1}{i}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)+\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0).$$

Comparând relaţiile(7) şi (11) rezultă necesitatea condiţiilor (2) şi astfel propoziţia este demonstrată.

Propoziţia 2. Fie f(z)=u(x,y)+iv(x,y) olomorfă în domeniul D (se notează $f\in\mathcal{H}$(D). Dacă u şi v admit derivate parţiale de ordinul doi continue în D atunci funcţiile u(x,y) şi v(x,y) sunt armonice, adică:

$\Delta u=0, \Delta v=0$,unde $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$,reprezintă operatorul lui Laplace.

6. Determinarea unei funcţii olomorfe pe un domeniu când se cunoaşte partea reală sau partea imaginară. Exemplu.

Să presupunem că f(z)=u(x,y)+iv(x,y) este o funcţie monogenă pe un domeniu D. Funcţiile u(x,y) şi v(x,y) verifică condiţiile lui Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \text{ şi } \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \quad .$$

Să presupunem că se cunoaşte funcţia u(x,y). Funcţia u(x,y) fiind partea reală a funcţiei monogene f(z) , este o funcţie armonică în D.

Cunoscând funcţia u(x,y), vom calcula derivatele funcţiei v(x,y):

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}$$

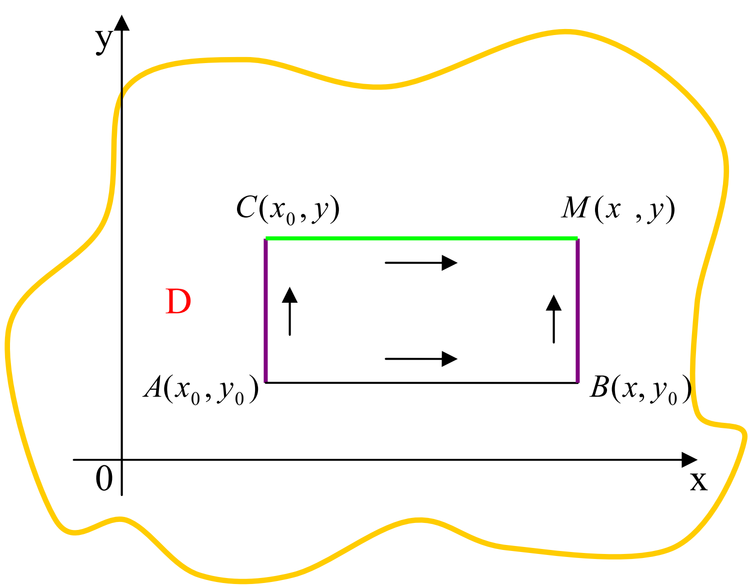
şi diferenţiala sa:

$$dv=-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy .$$

În partea dreaptă a egalităţii avem o diferenţială totală exactă, deoarece $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ u fiind funcţie armonică $,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. Funcţia v(x,y) se poate exprima printr-o integrală curbilinie independentă de drum,

$$(1) \qquad v(x,y)=\int_{AM}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy$$

$A(x_0,y_0)$ fiind un punct fix, iar M(x,y) un punct arbitrar din D. Drumul de la A la M se parcurge de obicei pe două segmente de dreaptă paralele cu axele de coordonate (figura), dacă acestea sunt cuprinse în domeniul D.



Calculând integrala pe drumul ABM, se obţine:

$$v(x,y)=-\int_{x_0}^{x}\frac{\partial u}{\partial y}(t,y_0)dt+\int_{y_0}^{y}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)dt$$

iar dacă se alege drumul ACM,

$$v(x,y)=\int_{y_0}^{y}\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,t)dt-\int_{x_0}^{x}\frac{\partial u}{\partial y}(t,y)dt\ .$$

Integrala (1) determină funcția v(x,y) în afara unei constante aditive, deci funcția f(z)=u(x,y)+iv(x,y) va fi determinată în afara unei constante aditive . Se observă uşor că f(z) astfel determinată este monogenă. Într-adevăr, deoarece sub semnul de integrală este o diferențială exactă, avem: $dv=-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy$, de unde rezultă $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}$.

În mod analog se arată că, dată fiind o funcție v(x,y) armonică în D, există o funcție f(z)=u(x,y)+iv(x,y) monogenă pe D. Funcția u(x,y) este determinată în afara unei constante aditive prin integrala curbilinie independentă de drum:

(2) $$u(x,y)=\int_{AM}\frac{\partial v}{\partial y}dx-\frac{\partial v}{\partial x}dy$$

şi cu aceasta f(z) este determinată în afara unei constante aditive .

Exemplu . Se dă $v(z,y)=e^x\sin y$. Să se determine funcția monogenă f(z)=u(x,y)+iv(x,y) ştiind că f(0)=1.

Se verifică uşor că v(x,y) este armonică. Din condițiile de monogeneitate obținem:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y,\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-e^x\sin y\ .$$

Deci:

$$du=e^x\cos y\cdot dx-e^x\sin y\cdot dy$$

şi

$$u(x,y)=\int_{AM}e^x\cos y\cdot dx-e^x\sin y\cdot dy\ .$$

Integrând pe drumul ABM din figura de mai sus, obținem:

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}e^x\cos y_0\cdot dx-\int_{y_0}^{y}e^x\sin y\cdot dy=e^x\cos y_0-e^{xo}\cos y_0+e^x\cos y-e^x\cos y_0$$

şi deci:

$$u(x,y)=e^x\cos y+C \qquad \text{C - constantă arbitrară}$$

$(C=-e^{x_0}\cos y_0)$.

Rezultă că: $f(z)=e^x\cos y+C+ie^x\sin y$. Din condiția f(0)=1 găsim C=0.

Obținem funcția monogenă: $f(z)=e^x\cos y+ie^x\sin y$

sau

$$f(z) = e^x(\cos y + i\sin y) = e^x \cdot e^{iy} = e^{x+iy}$$

şi deci:

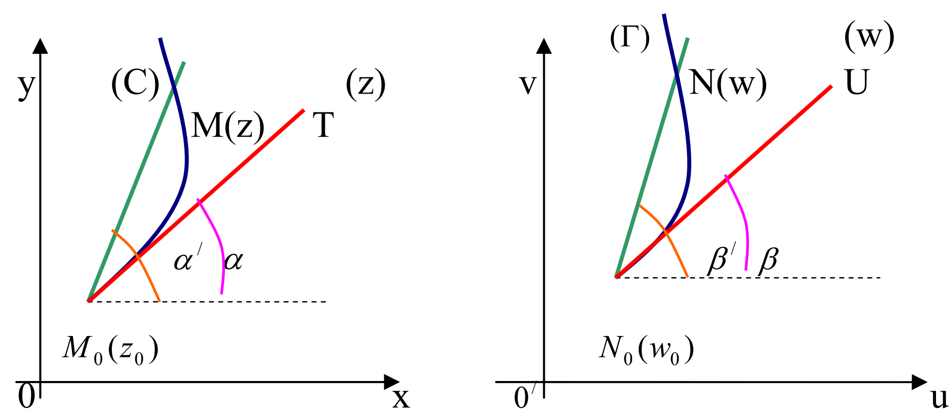
$$f(z) = e^z.$$

7. Interpretarea geometrică a derivatei. Transformarea conformă. Exemplu.

Fie f(z)=u+iv o funcţie definită în domeniul D. Presupunem că f(z) este monogenă în punctul $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ şi $f'(z_0) \neq 0$. Vom nota w=f(z) şi $w_0 = f(z_0)$. Funcţia f determină transformarea:

(1) u = u(x,y) , v = v(x,y)

între planele (z) şi (w). În planul (z) al variabilei se consideră un arc de curbă (C) care are o extremitate în $M_0(z_0)$ (figura).



Vom nota cu (Γ) imaginea curbei (C) prin transformarea punctuală (1) între planele complexe (z) şi (w). Deoarece $f'(z_0) \neq 0$, putem scrie:

$$(2) \quad \begin{cases} f'(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{w - w_0}{z - z_0}; \left| f'(z_0) \right| = \lim\limits_{z \to z_0} \left| \dfrac{w - w_0}{z - z_0} \right|, \quad sau \\ \lim\limits_{z \to z_0} \arg\left(\dfrac{w - w_0}{z - z_0} \right) = \arg f'(z_0). \end{cases}$$

.

Transformatele punctelor M_0 şi M de pe curba (C) sunt respectiv punctele N_0 şi N de pe curba (Γ).

Fie $\alpha^{/}$ şi α unghiurile formate de secanta M_0M şi tangenta M_0T în M_0 la curba (C) cu axa Ox.

Imaginile acestora prin transformarea (1) vor fi unghiurile $\beta^{/}$ şi β ale secantei N_0N şi ale tangentei N_0U în N_0 la curba imagine (Γ) din planul (w) cu axa Ou.

Observăm că:

$$(3) \qquad z - z_0 = \overline{N_0M} \cdot e^{i\alpha'}, w - w_0 = \overline{N_0N} \cdot e^{i\beta'}$$

şi notând cu Δs arcul de curbă $\overline{M_0M}$ pe (C) şi ΔS arcul $\overline{N_0N}$ de pe curba (Γ) , obținem:

$$(4)\ f^{/}(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{\overline{N_0M}}{\overline{M_0M}} e^{i(\beta^{/}-\alpha')} = \lim_{z\to z_0}\left(\frac{\overline{N_0M}}{\Delta S} \cdot \frac{\Delta s}{\overline{M_0M}} \cdot \frac{\Delta S}{\Delta s} \cdot e^{i(\beta'-\alpha')} \right) = \lim_{z\to z_0} \frac{\Delta S}{\Delta s} \cdot e^{i(\beta-\alpha)},$$

deoarece $\lim\limits_{\substack{M\to M_0 \\ (z\to z_0)}} \frac{\overline{M_0N}}{\Delta s} = 1$ şi $\lim\limits_{\substack{N\to N_0 \\ (z\to z_0)}} \frac{\overline{N_0M}}{\Delta S} = 1$.

Din relațiile (2) şi (4) obținem:

$$(5) \qquad \left| f^{/}(z_0) \right| = \lim_{z\to z_0} \frac{\Delta S}{\Delta s}$$

şi

$$(6) \qquad \arg f^{/}(z_0) = \beta - \alpha .$$

Am obținut :

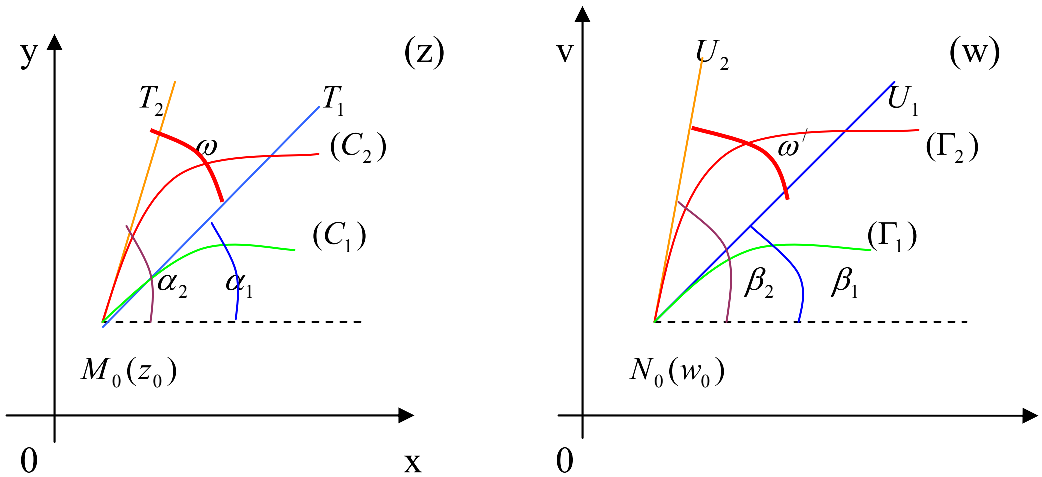
<u>*Propoziția 1.*</u> O funcție monogenă într-un punct z_0, având derivata diferită de zero $(f^{/}(z_0) \neq 0)$, transformă elementele de arc din vecinătatea punctului $M_0(z_0)$ în elemente de arc proporționale cu modulul derivatei în punctul z_0. Argumentul derivatei funcției în z_0 este unghiul cu care trebuie rotită în sens direct tangenta M_0T pentru a deveni paralelă cu tangenta N_0U la curba (Γ) . [Se admite că axele de coordonate din planele (z) şi (w) sunt paralele].

<u>**Definiția 1.**</u> Transformarea punctuală (1) între planele (z) şi (w) se numeşte *transformarea conformă* dacă păstrează unghiurile.

<u>*Propoziția 2.*</u> O funcție f(z) olomorfă într-un domeniu D având derivata diferită de zero în D defineşte o transformare conformă.

<u>Demonstrație.</u> Fie $(C_1),(C_2)$ două curbe din planul (z) ce trec prin punctul $M_0(z_0), z_0 \in D$ şi $f^{/}(z_0) \neq 0$. Imaginile acestor curbe în planul (w) vor fi (Γ_1) şi (Γ_2).

Curbele imagine (Γ_1), (Γ_2) trec prin punctul $N_0(w_0), w_0 = f(z_0)$ (figura).



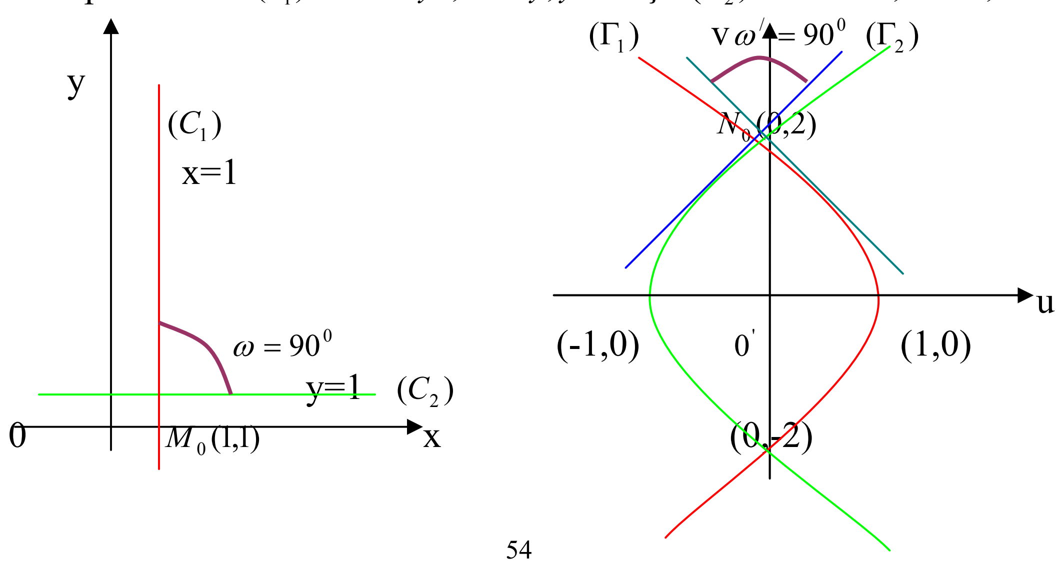
Fie α_1, α_2 unghiurile pe care le formează tangentele M_0T_1 şi M_0T_2 în punctul M_0 la curbele (C_1)şi (C_2)cu axa Ox şiβ_1, β_2 unghiurile pe care le formează tangentele imagine N_0U_1, N_0U_2 în punctul N_0la curbele (Γ_1), (Γ_2) cu axa Ou. Unghiurile $\omega = \alpha_2 - \alpha_1$ şi $\omega' = \beta_2 - \beta_1$ reprezintă unghiurile sub care se taie respectiv perechile de curbe (C_1, C_2)şi(Γ_1, Γ_2) . Obţinem:

(7) $\quad \arg f'(z_0) = \beta_2 - \alpha_2 = \beta_1 - \alpha_1$ $\quad$ de unde:

(8) $\quad \omega' = \beta_2 - \beta_1 = \alpha_2 - \alpha_1 = \omega$,

sau $\omega = \omega'$,deci curbele (C_1) şi (C_2) se taie sub acelaşi unghi ca şi curbele imagine (Γ_1) şi(Γ_2). Cu aceasta propoziţia este demonstrată.

Exemplu. Considerăm funcţia $w = f(z) = z^2, z \in C$. Deoarece $f'(z) \neq 0$, dacă $z \neq 0$, rezultă că f(z) realizează o transformare conformă în tot planul complex cu excepţia originii. Observăm că $u(x,y) = x^2 - y^2, v(x,y) = 2xy$, şi că f este olomorfă în $C(f'(z) = 2z)$. Imaginile dreptelor x = 1 şi y = 1 din planul (z) vor fi parabolele:(Γ_1) $u = 1 - y^2, v = 2y, y \in R$ şi (Γ_2) $u = x^2 - 1, v = 2x, x \in R$:



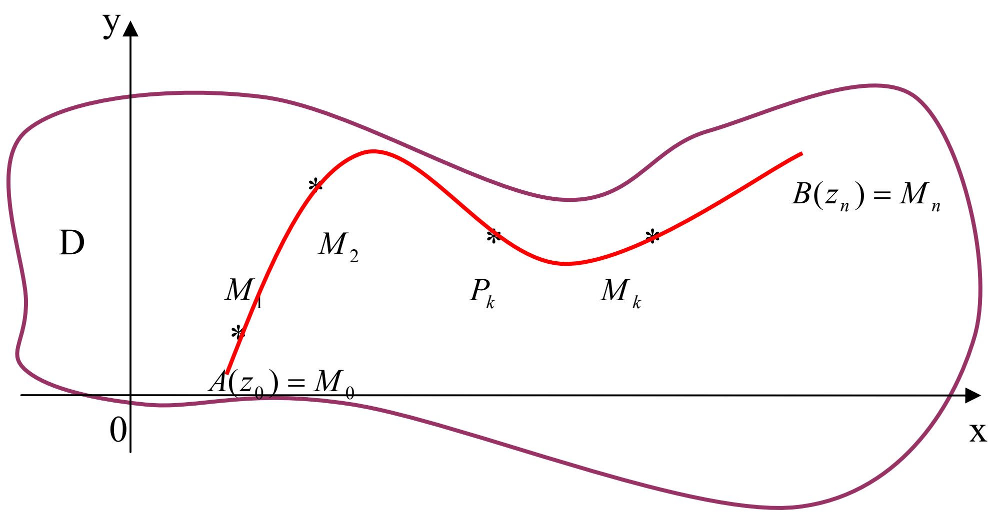
Imaginea dreptei x = 1 (C_1) este parabola (Γ_1) având ecuația $v^2 = -4(u-1)$, iar imaginea dreptei y = 1 (C_2) este parabola (Γ_2) de ecuație $v^2 = 4(u+1)$. Aceste două parabole sunt ortogonale şi trec prin $N_0(0,2)$ din planul (w), imaginea punctului $M_0(1,1)$ din planul (z). Observăm că se păstrează unghiurile prin transformarea conformă $f(z) = z^2$ $(\omega = \omega' = 90^0)$.

8. Integrala curbilinie în planul complex. Exemplu. Definiție. Principiul de calcul. Proprietăți.

Fie $\overline{AB}$ un arc de curbă în planul complex (z) definit parametric prin ecuațiile:

(1) x = x(t), y = y(t), $t \in [a,b]$.

Vom presupune că funcțiile x(t) şi y(t) sunt continue împreună cu derivatele de ordinul întâi pe [a,b] :



Să considerăm o diviziune (d) a intervalului [a,b] prin punctele de diviziune

(2) $a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_{k-1} < t_k ... < t_n = b$

Deoarece ecuația în complex a arcului de curbă $\overline{AB}$ este $z = x(t) + iy(t), t \in [a,b]$ diviziunea (d) induce pe arcul $\overline{AB}$ o diviziune (d') prin punctele de diviziune:

$$A = M_0(z_0), M_1(z_1), ..., M_{k-1}(z_{k-1}), ..., M_n(z_n) = B,$$

unde $z_k = z(t_k), k \in \{0,1,2,...n\}$. Norma diviziunii (d) a intervalului [a,b] este numărul $\nu(d) = \max_{1\le k\le n}(t_k - t_{k-1})$. În fiecare subinterval $[t_{k-1}, t_k]$ alegem un punct arbitrar υ_k. Acestui punct îi corespunde prin z = z(t), $t \in [a,b]$, pe arcul $\overline{M_{k-1}M_k}$ un punct intermediar $P_k(\alpha_k)$, corespunzător numărului complex $\alpha_k = z(\upsilon_k)$

Arcului $\overline{AB}$ şi corespunzător diviziunii (d) a intervalului [a,b] îi asociem cu ajutorul funcției f(z) numărul complex

(2) $\sigma_d(f) = \sum_{k=1}^{n} f(a_k)(z_k - z_{k-1})$.

<u>Definiția 1</u>. Funcția f(z), $z \in D$ este integrabilă pe arcul $\overline{AB} \subset D$, dacă există un număr complex I cu proprietatea că, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr $\eta(\varepsilon) > 0$ astfel încât, oricare ar fi diviziunea d cu $\nu(d) < \eta(\varepsilon)$ şi oricare ar fi alegerea punctelor intermediare υ_k, să avem:

(3) $|\sigma_d(f) - I| < \varepsilon$.

În acest caz vom scrie:

$$I = \lim_{\nu(d)\to 0} \sigma_d(f) = \int_{\overline{\overline{AB}}} f(z)dz$$

şi vom spune că I este *integrala curbilinie* pe arcul C a funcției f(z).

<u>Propoziția 1.</u> Dacă funcția complexă f(z)=u(x,y)+iv(x,y), $z \in D$, este continuă pe arcul de curbă , $\overline{AB}$ neted pe porțiuni, atunci integrala curbilinie a funcției f(z) pe arcul $\overline{AB}$ există şi are expresia:

(4) $\int_{\overline{\overline{AB}}} f(z)dz = \int_{\overline{AB}} u(x,y)dx - v(x,y)dy + i \int_{\overline{\overline{AB}}} v(x,y)dx + u(x,y)dy..$

<u>Demonstrație.</u> Notăm $z_k = x_k + iy_k = x(t_k) + iy(t_k)$ şi $a_k = \xi_k + i\eta_k = x(\upsilon_k) + iy(\upsilon_k), k \in \{1,2,...,n\}$. Deoarece:

$$f(\alpha_k) = u(\xi_k, \eta_k) + iv(\xi_k, \eta_k), z_k - z_{k-1} = (x_k - x_{k-1}) + i(y_k - y_{k-1})$$

obținem pentru suma $\sigma_d(f)$ expresia:

(5) $\sigma_d(f) = \sigma_d^{/}(f) + i\sigma_d^{//}(f)$,

unde:

$$\sigma_d^{/}(f) = \sum_{k=1}^{n} [u(\xi_k, \eta_k)\cdot(x_k - x_{k-1}) - v(\xi_k, \eta_k)\cdot(y_k - y_{k-1})].$$

şi

$$\sigma_d^{//}(f) = \sum_{k=1}^{n} [v(\xi_k, \eta_k)\cdot(x_k - x_{k-1}) + u(\xi_k, \eta_k)\cdot(y_k - y_{k-1})].$$

Ținând seama de definiția integralei curbilinii şi de faptul că funcțiile u(x,y) şi v(x,y) sunt continue pe $\overline{AB}$ iar x(t), y(t) au derivate continue cu excepția unui număr finit de puncte, rezultă:

$$\lim_{v(d)\to 0} \sigma_d^{/}(f) = \int_{\overline{AB}} u(x,y)dx - v(x,y)dy = \int_a^b \left\{u[x(t),y(t)]x^{/}(t) - v[x(t),y(t)]y^{/}(t)\right\}dt \ ,$$

şi

$$\lim_{v(d)\to 0} \sigma_d^{//}(f) = \int_{\overline{AB}} v(x,y)dx + u(x,y)dy = \int_a^b \left\{v[x(t),y(t)]x^{/}(t) + u[x(t),y(t)]y^{/}(t)\right\}dt \ .$$

Proprietăți ale integralei curbilinii :

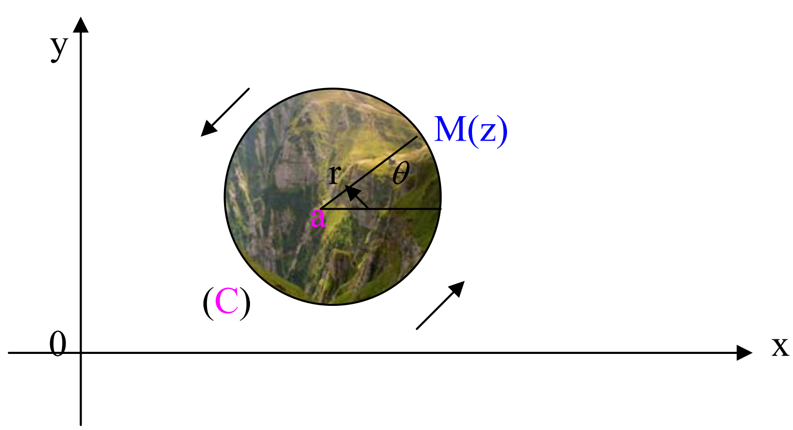
1. $\int_{\overline{AB}} f(z)dz = -\int_{\overline{BA}} f(z)dz;$;
2. $\int_{\overline{AB}} [\alpha f(z) + \beta g(z)]dz = \alpha \int_{\overline{AB}} f(z)dz + \beta \int_{\overline{AB}} g(z)dz, \alpha, \beta \in C$;
3. $\int_{\overline{AB}} f(z)dz = \int_{\overline{AC}} f(z)dz + \int_{\overline{CB}} f(z)dz, C \in \overline{AB}$;
4. $\left|\int_{\overline{AB}} f(z)dz\right| \leq M \cdot L$, unde $M = \sup_{z\in \overline{AB}} |f(z)|$ şi L este lungimea arcului $\overline{AB}$.

Observație. Integralele curbilinii pe contururi închise luate în sens direct se notează $\oint$.

Exemplu. Să se calculeze integrala:

$$I = \oint_C \frac{dz}{z-a}$$

unde (C) este un cerc cu centrul în punctul a şi de rază r (figura) care este parcurs în sens direct:



Punând $z=a+re^{i\theta}, \theta\in[0,2\pi]$, obținem:

$$\frac{1}{z-a}=\frac{1}{r}e^{-i\theta}, dz=ire^{i\theta}d\theta$$

şi

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{r}e^{-i\theta}ire^{i\theta}d\theta=i\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi i$$

9. Teorema lui Cauchy.

Pentru a defini integrala curbilinie a unei funcții f(z) pe o curbă (C) am presupus că f(z) este continuă pe (C) fără alte ipoteze referitoare la existența sau comportarea funcției în puncte care nu aparțin curbei (C). În cele ce urmează vom presupune că f(z) este olomorfă într-un domeniu D şi că (C) este conținută în D. Integralele curbilinii au proprietăți care depind de ordinul de conexiune al domeniului. Vom considera mai întâi cazul domeniului simplu conex.

Teorema lui Cauchy. Dacă f(z) este olomorfă într-un domeniu simplu conex D, atunci:

(1) $\int_C f(z)dz=0$

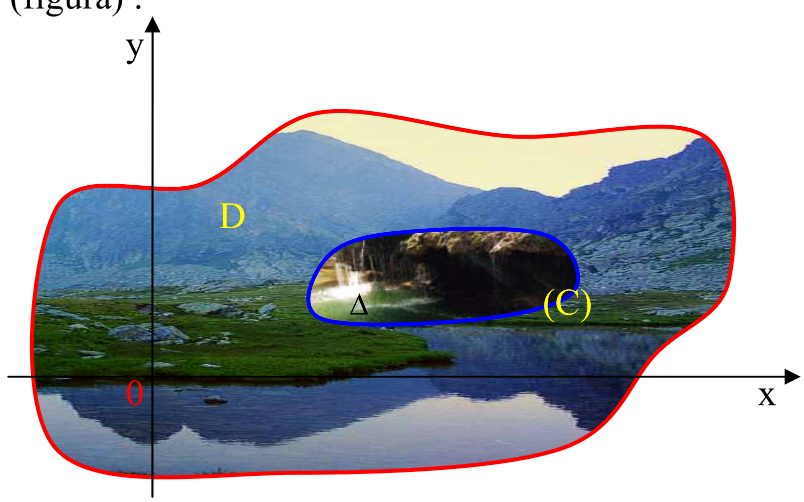
oricare ar fi curba închisă C conținută în D.

Demonstrație. Vom presupune în plus că $f^{/}(z)$ este continuă pe D (deşi această ipoteză nu este necesară, fapt dovedit de E.Goursat).

Fie $z=x+iy, f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$; avem:

(2) $\int_C f(z)dz=\int_C udx-vdy+i\int_C vdx+udy$.

Să presupunem că (C) este o curbă simplă şi să notăm cu Δ domeniul care are frontiera $(C)(\Delta\subset D)$ (figura) :



Integralelor din membrul drept al relației (2) li se poate aplica formula lui Green:

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_\Delta \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

în ipoteza că $\frac{\partial Q}{\partial x}$ şi $\frac{\partial P}{\partial y}$ sunt continue pe Δ. Continuitatea lui $f'(z)$ implică continuitatea derivatelor $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ şi aplicând formula lui Green obținem:

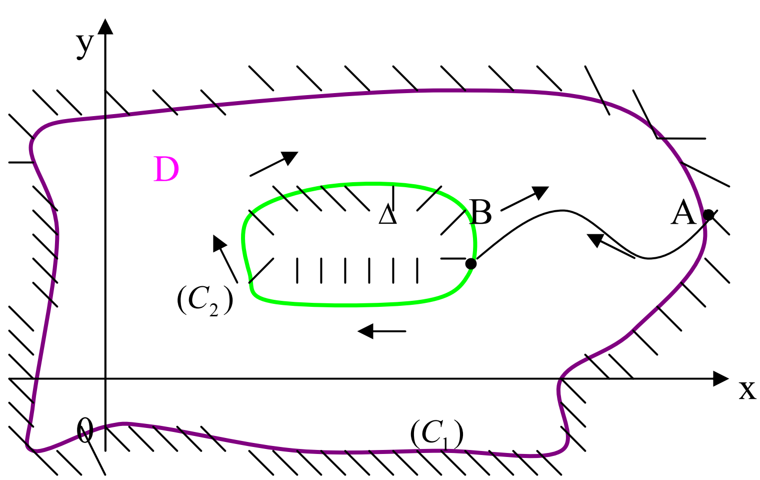
$$\int_C udx - vdy = \iint_\Delta \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy$$

(3) şi

$$\int_C vdx + udy = \iint_\Delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy \ .$$

Dar f(z) este olomorfă în D. Deoarece $\Delta \subset D$, în toate punctele domeniului Δ sunt satisfăcute condițiile de monogeneitate Cauchy-Riemann: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ şi $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$; deci cele două integrale din (3) sunt nule şi pe baza relației (2) găsim $\int_C f(z)dz = 0$ şi teorema este demonstrată.

Teorema lui Cauchy poate fi extinsă şi în cazul când domeniul este multiplu conex. Astfel, fie f(z) o funcție olomorfă în domeniul Δ dublu conex delimitat de curbele închise (C_1) şi (C_2) conform figurii:



Efectuând tăietura $\overline{AB}$, obținem domeniul simplu conex $D = \Delta \setminus \{\overline{AB}\}$, având ca frontieră curba $\Gamma = (C_1) \cup (C_2) \cup (\overline{AB}) \cup (\overline{BA})$, unde (C_1) este parcurs în sens direct iar (C_2) în sens invers. Aplicând teorema lui Cauchy pentrudomeniul simplu conex D delimitat de curba (Γ), obținem:

(4) $$\int_C f(z)dz = \int_{C_1^+} f(z)dz + \int_{\overline{AB}} f(z)dz + \int_{C_2^-} f(z)dz + \int_{\overline{BA}} f(z)dz = 0 \quad .$$

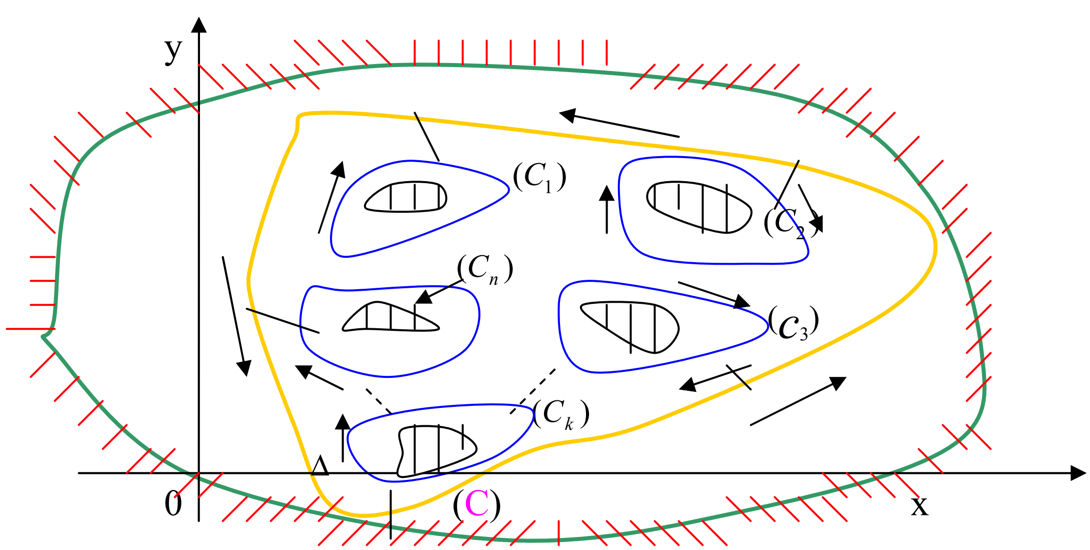
Cum $\int_{\overline{AB}} f(z)dz + \int_{\overline{BA}} f(z)dz = 0$ şi $\int_{C_2^-} f(z)dz = -\int_{C_2^+} f(z)dz$

formula (4) ne dă:

(5) $$\int_{C_1^-} f(z)dz = \int_{C_2^+} f(z)dz \, .$$

Prin C_1^+, C_2^+ , am notat faptul că (C_1) şi (C_2) se parcurg în sens direct.

În cazul unui domeniu Δ multiplu conex delimitat de curbele (C_1), $(C_2), \ldots, (C_n)$ unde (C_1), $(C_2), \ldots, (C_n)$ sunt exterioare între ele şi interioare unei curbe (C), $C \subset \Delta$ (figura) avem: dacă f(z) este olomorfă în domeniul Δ, în mod analog, prin practicarea unor tăieturi între C şi curbele (C_1), $(C_2), \ldots, (C_n)$ obținem *formula lui Cauchy pentru domenii multiple conexe:*

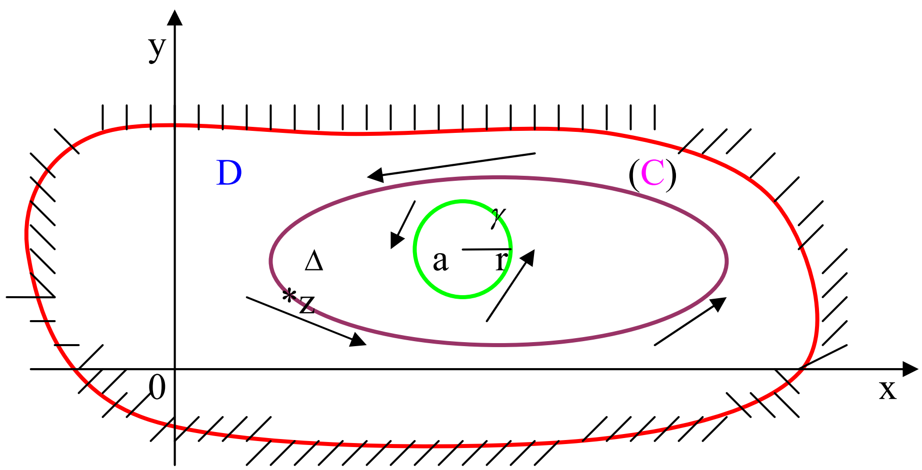


(6) $$\int_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z)dz$$

(curbele (C_1), $(C_2),\ldots,(C_n)$ sunt parcurse în sens direct).

10. Formula integrală a lui Cauchy.

Fie f(z) o funcţie olomorfă într-un domeniu simplu conex D şi C o curbă simplă închisă conţinută în D. Notăm cu Δ domeniul mărginit care are frontiera C (figura) $(\Delta \subset D)$



Teorema 1. Dacă se dau valorile funcţiei f(z) pe curba (C), atunci funcţia este complet determinată în Δ, şi anume:

(1) $$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz \ .$$

Demonstraţie. Fie (γ) un cerc cu centrul în punctul a şi de rază r, interior lui (C) (figura). Funcţia $\frac{f(z)}{z-a}$ este olomorfă în domeniul dublu conex Δ delimitat de curba (C) şi cercul (γ). Conform teoremei lui Cauchy pentru domeniile dublu conexe, avem:

(2) $$\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}dz = \int_\gamma \frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz + \int_\gamma \frac{f(a)}{z-a}dz$$

Observăm că $\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} = 2\pi i$.

Funcţia f(z) fiind monogenă în punctul a, este continuă în acest punct şi astfel putem scrie evaluarea

(3) $|f(z)-f(a)| < \varepsilon$ pentru $|z-a| < \eta(\varepsilon)$ $, z \in D$.

Considerând $r < \eta(\varepsilon)$, pentru $z \in (\gamma)$ avem $|z-a| < \eta(\varepsilon)$ şi pe baza proprietăţii modulului integralei , putem scrie:

$$\left|\int_\gamma \frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz\right| \le \int_\gamma \frac{|f(z)-f(a)|}{|z-a|}|dz| \le \frac{\varepsilon}{r}\int_\gamma ds = 2\pi\varepsilon$$

unde $ds = |dz|$ reprezintă elementul diferențial de curbă pe arcul (γ). Cum $\varepsilon > 0$ este arbitrar, făcând $\varepsilon \to 0$ obținem: $\int_\gamma \frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz = 0$.

Ținând seama de relațiile (2) şi de cele de mai sus, obținem formula (1) numită *formula integrală a lui Cauchy*.

Formula integrală a lui Cauchy poate fi scrisă şi pentru un domeniu multiplu conex. Astfel, în baza formulei lui Cauchy pentru domenii multiplu conexe, dacă a este un punct din domeniul de olomorfie al funcției f(z), avem formula integrală a lui Cauchy pentru domenii multiplu conexe:

(4) $$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz - \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\int_{C_K}\frac{f(z)}{z-a}dz \quad .$$

Are loc şi:

<u>Teorema 2</u>. Fie f(z) o funcție olomorfă în domeniul simplu conex D, delimitat de curba închisă (C) netedă pe porțiuni. Atunci funcția f(z) este indefinit derivabilă în D şi:

(5) $$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$$

unde a este un punct oarecare situat în interiorul lui (C). Formula (5) se obține uşor prin inducție, derivând în raport cu a, sub semnul integralei egalitatea: $f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz$. Aceasta justifică faptul că o funcție olomorfă este *indefinit derivabilă* şi $f^{(k)}(z)$ este olomorfă $k \in \{1,2,....\}$.

<u>11. Serii de puteri. Teorema lui Abel. Dezvoltări în serie Taylor</u>

Fie şirul de funcții $(f_n(z)), z \in D, D \subset C$. Spunem că şirul de funcții considerat este convergent în punctul $z_0 \in D$ dacă şirul de numere complexe $(f_n(z_0))$ este convergent.

<u>Definiția 1</u>. Şirul de funcții $(f_n(z)), z \in D$ este *uniform convergent* pe mulțimea $A \subset D$ către funcția $f(z), z \in A$, , dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr natural $n_0(\varepsilon)$ astfel încât pentru $n > n_0(\varepsilon)$ să avem:

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \forall z \in A \quad .$$

Fie seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$. Spunem că seria este convergentă în $z_0 \in D$, dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$. este convergentă. Mulțimea punctelor de convergență ale seriei le numim *mulțimea de convergență.*

Definiția 2. Seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ este uniform convergentă pe mulțimea $A \subset D$ şi are suma funcția $S(z), z \in A$, dacă şirul sumelor parțiale $(S_n(z))$ al seriei $\sum_{1}^{\infty} f_n(z)$, unde:

$$S_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + ... + f_n(z), z \in D$$

converge uniform pe mulțimea A către S(z).
Are loc:

Propoziția 1. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z), z \in D$, o serie de funcții şi $\sum_{n=0}^{\infty} u_n, u_n > 0$, o serie convergentă. Dacă pentru orice $z \in A \subset D$, şi $\forall n \in N, |f_n(z)| \le u_n$,atunci seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$, este uniform convergentă pe mulțimea $A \subset D$.

Dacă $f_n(z) = c_n z^n$, sau $c_n(z-a)^n$, obținem seriile de puteri: $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$, sau $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-a)^n, c_n$ şi $a \in C$.

Are loc:

Teorema lui Abel. Pentru orice serie de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ există un număr $R \geq 0$ numit *rază de convergență*, căruia îi corespunde în planul complex cercul |z|=R numit *cerc de convergență*, având următoarele proprietăți:

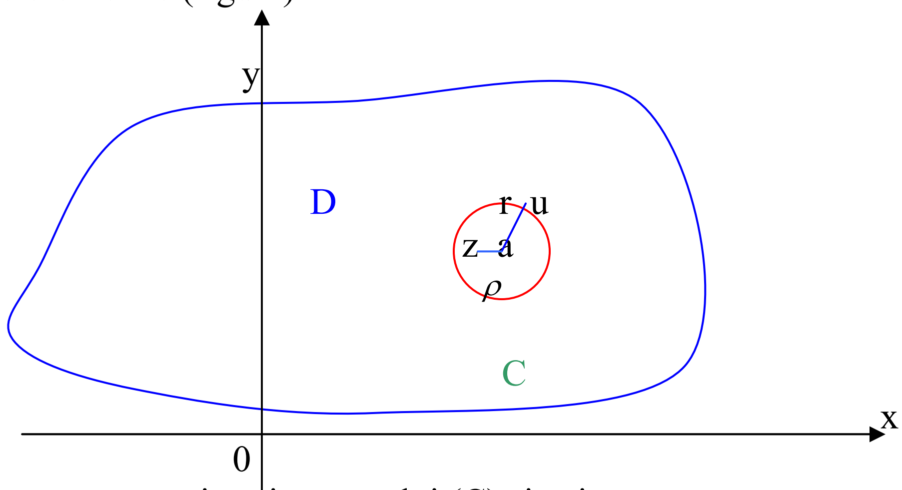
1. În interiorul cercului de convergență $|z| < R$ seria de puteri este *absolut convergentă*;
2. În exteriorul cercului de convergență $|z| > R$ seria este *divergentă*;
3. În orice disc interior cercului de convergență $|z| \le r < R$ seria este *uniform convergentă*.

Ca şi în cazul seriilor de puteri reale, raza de convergență se determină conform teoremei Cauchy - Hadamard

$$(1)\quad \begin{cases} R = \dfrac{1}{\omega}, \omega = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} \\ \text{sau} \\ R = \dfrac{1}{\omega}, \omega = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|. \end{cases}$$

Dezvoltări în serie Taylor.

Fie f(z) o funcţie olomorfă într-un domeniu D şi a un punct interior lui D. Considerăm un cerc (C) cu centrul în punctul a şi de rază r situat în domeniul de olomorfie (figura)



Vom nota cu z un punct interior cercului (C) şi , şi cu u un punct oarecare de pe (C), $|u-a| = r$. Conform formulei lui Cauchy putem scrie:

(2) $\quad f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\int_C \dfrac{f(u)}{u-z}du$ .Observăm că :

$$(3)\quad \frac{1}{u-z} = \frac{1}{u-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{u-a}} = \frac{1}{u-a}\left[1 + \frac{z-a}{u-a} + \ldots + \left(\frac{z-a}{u-a}\right)^n + \left(\frac{z-a}{u-a}\right)^{n+1}\frac{1}{1-\frac{z-a}{u-a}}\right]$$

Înlocuind relaţia (3) în (2), vom obţine:

(4)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(u)}{u-a}du + \frac{z-a}{2\pi i}\int_C \frac{f(u)}{(u-a)^2}du + \ldots + \frac{(z-a)^n}{2\pi i}\int_C \frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}}du + R_n$$

unde

$$(5)\quad R_n = \frac{(z-a)^{n+1}}{2\pi i}\int_C \frac{f(u)du}{(u-a)^{n+1}[(u-a)-(z-a)]} .$$

Ținând seama de expresia derivatelor unei funcții olomorfe, $f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(u)du}{(u-a)^{n+1}}$ egalitatea (4) devine:

(6) $$f(z)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(z-a)+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+R_n .$$

Notând $M=\sup_{z\in C}|f(z)|$, obținem pentru termenul complementar R_n:

$$|R_n|\le \frac{|z-a|^{n+1}}{2\pi}\int_C \frac{|f(u)||du|}{|u-a|^{n+1}\cdot|r-\rho|}\le \frac{M}{2\pi}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{r-\rho}\cdot\int_C |du|$$

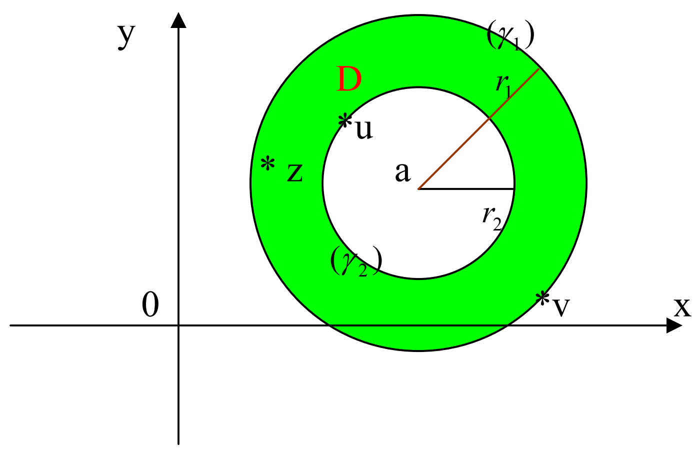
adică $|R_n|\le \frac{Mr}{r-\rho}\cdot\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+1}$. Cum $\frac{\rho}{r}<1$ rezultă $\lim_{n\to\infty} R_n=0$ și din (6) obținem:

(7) $$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

care reprezintă *dezvoltarea în serie Taylor* a funcției olomorfe f(z) .

12. Seria lui Laurent. Puncte singulare.

Fie f(z) o funcție olomorfă într-o coroană circulară $D=\{r_2\le|z-a|\le r_1\}$:



Vom nota cu γ_1 și γ_2 cercurile ce delimitează coroana circulară D. Ne propunem să găsim pentru funcția f(z) o reprezentare sub formă de serie după puterile lui z-a. Dezvoltarea găsită se va numi dezvoltarea funcției f(z) în *serie Laurent* în coroana circulară D. Aceasta ne va conduce la o generalizare a seriilor de puteri, ajungându-se la serii bilaterale, cu ocazia cărora se va introduce și noțiunea de reziduu.

Fie z un punct interior coroanei D. Atunci conform formulei integrale a lui Cauchy pentru domeniile dublu conexe, pentru valoarea funcției f(z) avem expresia:

(1) $$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(v)dv}{v-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(u)du}{u-z} .$$

Punctul z fiind interior cercului (γ_1) , procedând ca şi în cazul seriei Taylor, prima integrală din (1) se poate scrie sub forma unei serii Taylor:

(2) $$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(v)dv}{v-z}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$$

unde:

(3) $$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(v)dv}{(v-a)^{n+1}},n\in\{0,1,2,...\}\ .$$

A doua integrală din (1) se poate scrie sub forma

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(u)du}{u-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(u)du}{(z-a)-(u-a)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(u)}{z-a}\left[1+\tfrac{u-a}{z-a}+...+\left(\tfrac{u-a}{z-a}\right)^n+\left(\tfrac{u-a}{z-a}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{1-\frac{u-a}{z-a}}\right]du$$

Notând cu u un punct oarecare de pe cercul (γ_2) şi $\rho=|z-a|$, avem $\left|\frac{u-a}{z-a}\right|=\frac{r_2}{\rho}<1$.

Deci:

(4) $$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(u)du}{u-z}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{(z-a)^k}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}f(u)(u-a)^{k-1}du+R_n\ \text{unde}$$

(5) $$R_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma 2}f(u)(\tfrac{u-a}{z-a})^{n+1}\cdot\tfrac{1}{z-a}du\ .$$

Aplicând proprietatea modulului integralei în complex şi notând $M=\sup_{z\in\gamma_2}|f(z)|$,obținem:

$$|R_n|\le M\cdot\left(\frac{r_2}{\rho}\right)^{n+1}\frac{r_2}{\rho-r_2}\ .$$

Deoarece $\frac{r_2}{\rho}<1$, rezultă $\lim_{n\to\infty}R_n=0$ şi astfel relația (4) devine:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(u)du}{z-u}=\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-a)^{-n}\ \text{, unde}$$

(6) $$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}f(u)(u-a)^{n-1}du\ .$$

Înlocuind expresiile (2) şi (6) în (1), obținem pentru funcția f(z) în coroana

circulară D următoarea dezvoltare:

(7) $$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n=\sum_{n=-\infty}^{-1}c_n(z-a)^n+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n,$$

unde

(8) $$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}f(u)(u-a)^n\,du, n\in Z,$$

iar (γ) este un cerc oarecare cu centrul în punctul a şi de rază r $(r_2<r<r_1)$.

Seriile $\sum_{n=-\infty}^{-1}c_n(z-a)^n,\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ se numesc respectiv *partea principală* şi *partea tayloriană* a seriei *Laurent.*

***Puncte singulare*.**

<u>Definiția 1</u>. Fie f(z) o funcție definită în domeniul D şi *a* un punct aparținând domeniului D. Spunem că punctul $a\in D$ este un *punct ordinar* al funcției f(z), dacă există o vecinătate V a punctului *a* inclusă în D , unde f(z) se poate dezvolta în serie Taylor, deci putem scrie:

(9) $$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n, z\in V\subset D .$$

Un punct care nu este punct ordinar pentru funcția f(z) se numeşte *punct singular.*

Un punct a$\in D$ este *un zero multiplu* de ordinul m al funcției f(z), dacă există un cerc cu centrul în punctul *a* inclus în D astfel încât:

(10) $$f(z)=(z-a)^m[c_m+c_{m+1}(z-a)+...],c_m\neq 0 .$$

Propoziția 1. Zerourile unei funcții olomorfe într-un domeniu sunt *puncte izolate.*

<u>Definiția 2</u>. Un punct $a\in D$ este un *pol al funcției f(z)*, dacă există un cerc cu centrul în punctul *a*, inclus în domeniul D, în care funcția f(z) poate fi scrisă sub forma unei serii Laurent cu un număr finit de puteri negative a lui *z-a*, adică:

(11) $$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+...+\frac{c_{-1}}{z-a}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n .$$

Numărul m reprezintă ordinul polului *z = a* al funcției f(z).

Un punct singular care nu este pol pentru o funcție se numeşte un *punct singular esențial*.

Observăm că dacă *a* este un punct singular izolat pentru funcția f(z), atunci există coroana circulară $\Delta=\{0<|z-a|\leq r\}$ în care f(z) are o dezvoltare în serie Laurent cu o infinitate de termeni cu puteri negative ale lui z-a. Deci, în acest caz putem scrie seria Laurent:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

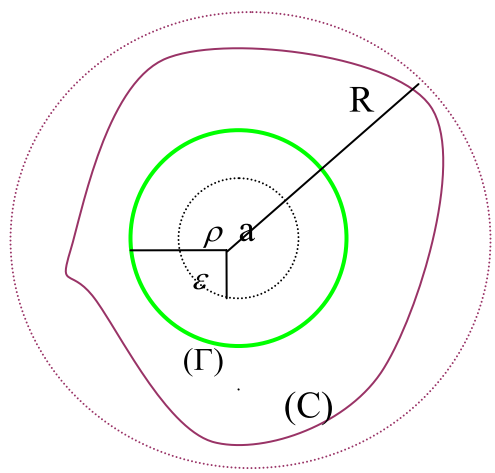
partea principală a seriei Laurent având un număr infint de termeni.

O funcție f(z) care într-un domeniu D nu are decât puncte ordinare sau poli se numeşte *funcție meromorfă în D*.

Propoziția 2. Dacă f(z) este o funcție rațională ireductibilă $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, atunci zerourile de ordinul m a lui Q(z) sunt poli de ordinul m pentru funcția f(z).

13. **Reziduu. Teorema reziduurilor. Exemplu.**

Fie z = a un pol sau un punct singular esențial izolat al funcției f(z). În coroana circulară $\varepsilon < |z-a| < R$, cu $\varepsilon > 0$, arbitrar de mic, funcția f(z) este olomorfă. Fie Γ, un cerc cu centrul în a şi de rază ρ, conținut în această coroană circulară, $\varepsilon < \rho < R$, (figura)



O curbă închisă simplă (C) conținută în coroana circulară poate înconjura sau nu punctul a. În primul caz, C este echivalentă cu Γ şi avem:

$$\int_C f(z)dz = \int_\Gamma f(z)dz \; .$$

În al doilea caz, integrala pe C este nulă.

Definiție. Prin *reziduul* funcției f(z) relativ la polul sau punctul singular esențial izolat z = a, notat rez f(a) înțelegem:

(1) $$rezf(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)dz \; .$$

Reziduul unei funcții f(z) relativ la a se poate obține întotdeauna din dezvoltarea în seria Laurent în jurul punctului a. Obținem :

(2) $$rezf(a) = c_{-1}$$

unde c_{-1} este coeficientul lui $\frac{1}{z-a}$ din dezvoltarea în serie Laurent a funcției f(z) în jurul punctului a.

Metode de calcul a reziduului unei funcții.

Fie a un pol al funcției f(z) şi p ordinul său de multiplicitate. Atunci funcția $\varphi(z) = (z-a)^p f(z)$ are în z = a un punct ordinar şi $\varphi(a) \neq 0$. Ținând seama de aceasta, (1) devine:

$$rezf(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\varphi(z)}{(z-a)^p} dz$$

sau, ținând seama de modul de calcul a derivatelor:

$$rezf(a) = \frac{1}{(p-1)!}\varphi^{(p-1)}(a), p > 1.$$

Înlocuind pe $\varphi(z)$ cu expresia sa, obținem următoarele formule de calcul a reziduului:

1) dacă z = a este un pol multiplu de ordinul p al funcției f(z) atunci:

(3) $$rezf(a) = \frac{1}{(p-1)!}[(z-a)^p \cdot f(z)]_{z=a}^{(p-1)} \quad ;$$

2) dacă z = a este un pol simplu,

(4) $$rezf(a) = [(z-a)f(z)]_{z=a}.$$

Dacă $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ şi dacă f(z) are pe a un pol simplu atunci h(a) = 0. În acest caz:

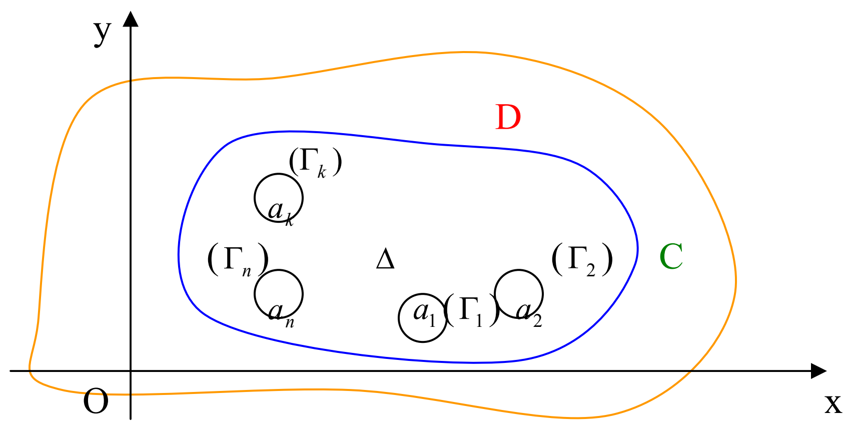
(5) $$rezf(a) = \frac{g(a)}{h^{/}(a)}.$$

Teorema reziduurilor. Exemplu.

Fie f(z) o funcție olomorfă într-un domeniu D şi C o curbă închisă, simplă conținută în D. Să notăm cu Δ domeniul mărginit care are frontiera C.

Dacă $\Delta \subset D$, adică dacă în Δ nu există singularităţi ale funcţiei f(z), în virtutea teoremei lui Cauchy $\int_C f(z)dz = 0$.

Să presupunem acum că în Δ se află un număr finit de singularităţi ale funcţiei f(z), poli sau puncte singulare esenţiale $a_1, a_2, ..., a_n$ (figura).



Aceste singularităţi sunt evident izolate.

Pentru fiecare punct a_k vom considera un cerc Γ_K cu centrul în a_k şi cu raza ρ_k suficient de mică, astfel ca în interiorul lui să nu mai existe o altă singularitate a funcţiei f(z) diferită de. a_k

Dacă $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$ sunt suficient de mici, cercurile $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_n$ nu au puncte comune şi sunt conţinute în Δ. Aplicând teorema lui Cauchy pentru domenii multiplu conexe,

$$\int_C f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz + ... + \int_{\Gamma_n} f(z)dz \ .$$

Ţinând seama că $\int_{\Gamma_k} f(z)dz = 2\pi i rez f(a_k), k \in \{1,2,...,n\}$, obţinem o teoremă importantă prin aplicaţiile sale:

<u>Teorema reziduurilor (Cauchy).</u> Dacă în interiorul domeniului mărginit de curba C funcţia f(z) are un număr finit de singularităţi, $a_1, a_2, ..., a_n$, poli sau puncte singulare esenţiale, atunci:

(6) $$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} rez f(a_k) .$$

Observăm că în fond teorema reziduurilor este o traducere convenabilă a teoremei lui Cauchy pentru domenii multiplu conexe folosind noțiunea de reziduu. Utilitatea sa constă în faptul că pentru calculul reziduurilor avem mijloace relativ simple.

Exemplu. Să se calculeze integrala:

$$I = \int_C \frac{1+\sin\frac{\pi}{z}}{1+z} dz \text{ unde C este elipsa } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 .$$

În interiorul domeniului mărginit de (C) sunt două singularități ale funcției $f(z) = \frac{1+\sin\frac{\pi}{z}}{1+z}$, şi anume $z = -1$ pol simplu şi z=0 punct singular esențial izolat. Folosind teorema reziduurilor avem:

$$I = 2\pi i[rezf(-1) + rezf(0)] .$$

Observăm că:

$$rezf(-1) = [(z+1)f(z)]_{z=-1} = (1+\sin\tfrac{\pi}{z})_{z=-1} = 1 .$$

Pentru a calcula reziduul relativ la punctul singular esențial z=0, vom dezvolta pe f(z) în serie Laurent în jurul acestui punct:

$$f(z) = \frac{1}{1+z}(1+\sin\tfrac{\pi}{z}) = (1 - z + z^2 - z^3 + ...)\cdot\left(1 + \tfrac{1}{1!}\cdot\tfrac{\pi}{z} - \tfrac{1}{3!}\cdot\tfrac{\pi^3}{z^3} + ...\right)$$

valabilă pentru $0 < |z| < 1$. Din produsul celor două serii reținem numai coeficientul lui $\frac{1}{z}$:

$$rezf(0) = c_{-1} = \pi - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} - ... = \sin\pi = 0 .$$

Rezultă $I = 2\pi i$.

Reziduul unei funcții relativ la punctul de la infinit.

Să presupunem că punctul de la infinit $z = \infty$ este un pol sau punct singular esențial al funcției f(z). Notând cu $z = \frac{1}{u}$ rezultă că u = 0 este un pol; în vecinătatea originii putem scrie seria Laurent:

$$f\left(\frac{1}{u}\right) = ... + \frac{c_{-m}}{u^m} + ... + \frac{c_{-1}}{u} + c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + ...$$

adică

$$(7) \qquad f(z) = ...c_{-m} + ... + c_{-1}z + c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + ...$$

valabilă în coroana circulară $\Delta = \{R \le |z| < \infty\}$.

Prin definiție coeficientul c_1 din (7) se numeşte reziduul funcției f(z) relativ la punctul de la ∞:

$$c_1 = rez[f(z)]_{z=+\infty} .$$

Notând cu (C) o curbă închisă ce conține originea şi parcursă în sens indirect, obținem ținând seama de noțiunea de reziduu

(8) $$rez[f(z)]_{z=\infty} = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz\ .$$

Din (6) şi (8) deducem uşor egalitatea:

(9) $$\sum_{k=1}^{\infty} rezf(a_k) + rez[f(z)]_{z=\infty} = 0\ .$$

14. **Aplicații ale teoremei reziduurilor. Teorema semireziduurilor. Exemple.**

În cele ce urmează vom da câteva clase de integrale ce pot fi calculate folosind teorema reziduurilor.

În cazul când integrala care trebuie calculată nu este o integrală pe o curbă închisă, arcul de curbă pe care se integrează trebuie completat printr-un alt arc de curbă convenabil ales. De obicei această completare se face prin arce de cerc sau drepte.

Integralele care apar se calculează folosind următoarea

Lemă (Jordan)

1. Dacă $\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)=0$ şi (C) este un arc de cerc de pe cercul $|z-a|=R$, astfel încât $\alpha \le \arg(z-a) \le \beta$, atunci

$$\lim_{R\to 0}\int_C f(z)dz = 0\ .$$

2. Dacă

$$\lim_{R\to\infty}|(z-a)f(z)| = 0 \quad \text{atunci}$$

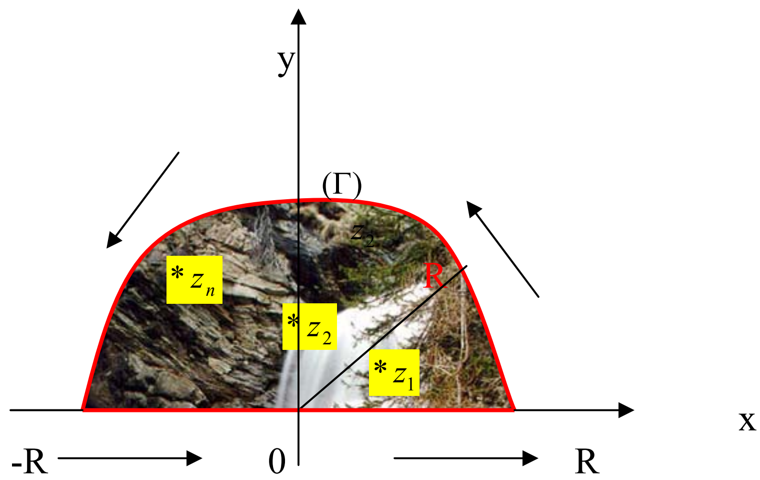
$$\lim_{R\to\infty}\int_C f(z)dz = 0\ .$$

I. Calculul integralelor de forma:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx \quad \text{unde} \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{este ireductibilă.}$$

Pentru ca integrala să existe şi să fie convergentă vom presupune că polinomul Q(x) are numai rădăcini complexe şi că gradul polinomului Q(x) este mai mare decât gradul lui P(x) cu cel puțin două unități. Considerăm

funcția complexă $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ unde rădăcinile $z_1, z_2, ..., z_n$ ale polinomului Q(z) situate în planul complex deasupra axei reale, vor fi poli pentru funcția f(z). Ducem un semicerc (Γ) de rază R şi cu centrul în origine, situat deasupra axei reale (figura) care cuprinde toți polii funcției f(z):



Notăm cu $(C)=(\Gamma)\cup[-R,R]$ parcursă în sens direct. Aplicând teorema reziduurilor obținem:

(1) $$\int_{\Gamma}\frac{P(z)}{Q(z)}dz+\int_{-R}^{+R}\frac{P(x)}{Q(x)}dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n} rezf(z)\Big|_{z=z_K}$$

Deoarece $\lim\limits_{|z|\to\infty} z\cdot f(z)=0$ avem $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{\Gamma}\frac{P(z)}{Q(z)}dz=0$. Cu acestea, trecând la limită când $R\to\infty$ în (1) obținem:

(2) $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n} rezf(z)\Big|_{z=z_k},$$

unde membrul drept reprezintă suma reziduurilor funcției P(z)/Q(z) relativ la polii situați deasupra axei reale.

II. Calculul integralelor de forma: $\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)d\theta$ unde R este rațională. Dacă se face schimbarea de variabilă $z=e^{i\theta}$, când θ parcurge intervalul $[0,2\pi]$, z descrie cercul $|z|=1$ o dată şi numai o dată, în sens direct.

Folosim formulele lui Euler:

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

Din relația $dz = ie^{i\theta}d\theta$ rezultă $d\theta = \frac{1}{iz}dz$ .Integrala devine: $I = \int\limits_{|z|=1} R_1(z)dz$ după care aplicăm teorema reziduurilor pentru calculul integralei pe $|z| = 1$.

Exemplu. Să se calculeze: $I = \int\limits_0^{\pi} \frac{d\theta}{5 + 4\sin\theta}$.

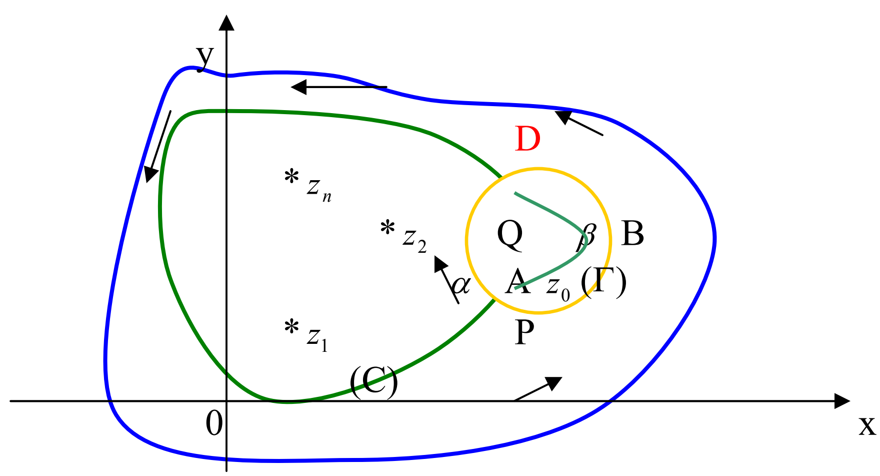
Cu substituția $z = e^{i\theta}$, integrala devine:

$$I = \int\limits_{|z|=1} \frac{1}{5 + \frac{2}{i}(z - \frac{1}{z})} \cdot \frac{dz}{iz}; I = \int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{2z^2 + 5iz - 2},$$

Funcția de sub semnul integrală are polii simplii $z_1 = -\frac{i}{2}, z_2 = -2i$, dintre care numai primul este interiorul cercului $|z| = 1$. Reziduul relativ la acest punct este: $rezf(z)\Big|_{z=-\frac{1}{3i}} = \frac{1}{3i}$, și deci $I = \frac{2\pi}{3}$.

Teorema semireziduurilor .Exemplu.

Fie (C) o curbă închisă netedă pe porțiuni ce cuprinde în interior un număr finit de puncte singulare izolate $z_1, z_2, ..., z_n$ ale funcției f(z) :



Dacă pe curba (C) se află punctul z_0, pol al funcției f(z) şi în z_0 curba (C) are tangentă unică, atunci:

(3) $$\int\limits_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} rezf(z_k) + \pi i \cdot rez[f(z)]_{z=z_0}$$

<u>Demonstrație.</u> Fie (Γ) un cerc cu centrul în punctul z_0 şi de rază R. Conform teoremei reziduurilor putem scrie relațiile:

$$(4)\quad \int_{C\setminus\overline{\overline{QP}}} f(z)dz + \int_{\overline{\overline{PAQ}}} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} rezf(z_k)\Big|_{z=z_k}$$

$$\int_{C\setminus\overline{\overline{QP}}} f(z)dz + \int_{\overline{\overline{PBQ}}} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} rezf(z_k)\Big|_{z=z_k} + 2\pi i\sum_{k=1}^{n} rezf(z_k)\Big|_{z=z_0}$$

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + ... + c_n(z - z_0)^n + ...$$

Observăm că:

$$(5)\quad \lim_{R\to 0}\left[\int_{PAQ} f(z)dz + \int_{PBQ} f(z)dz\right] = 0\ (\ \lim_{R\to 0}\int_{PAQ} f(z)dz = -c_{-1}\pi,\ \int_{PBQ} f(z)dz = c_{-1}\pi\ ).$$

Pentru $R \to 0$ integralele din seria Tayloriană sunt nule.

Adunând relațiile (4) şi trecând la limită ($R \to 0$), în baza relației (5) obținem formula (3).

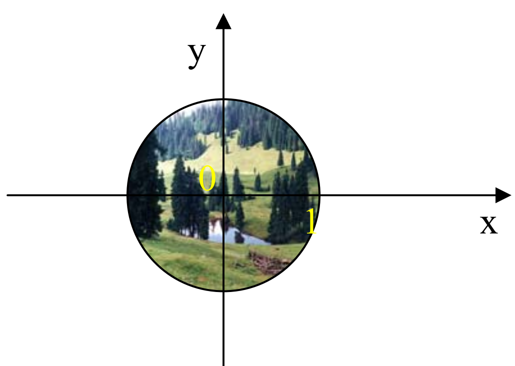
Observație. În general, teorema semireziduurilor, poate fi scrisă sub forma:

$$\int_{C} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{p} rez f(z)\Big|_{z=z_K} + \pi i\sum_{j=1}^{m} rezf(z)\Big|_{z=a_j}$$

unde $z_k, k = \overline{1,p}$ şi $\alpha_j, j = \overline{1,m}$ reprezintă respectiv punctele singulare din interiorul lui (C) şi de pe curba (C) ale funcției f(z).

Exemplu. Să se calculeze integrala: $I = \int_{|z|=1} \frac{dz}{z(z-1)}$

Funcția are polii simplii z = 0 şi z = 1 Cercul (Γ) de ecuație $|z| = 1$ trece prin polul z = 1.



Aplicând teorema semireziduurilor, obținem:

$$I = 2\pi i \cdot rezf(z)\Big|_{z=0} + \pi i \cdot rezf(z)\Big|_{z=1}$$

Avem: $rezf(z)\Big|_{z=0} = \lim_{z\to 0} zf(z) = -1$ şi $rezf(z)\Big|_{z=1} = \lim_{z\to 1}[(z-1)f(z)] = 1$.

Deci: $I = -\pi i$.

15. **Funcții elementare.**

a) *Funcția radical*: $f(z) = \sqrt{z}$.

Fie $z = \rho \cdot e^{i\frac{\theta}{2}}$; obținem pentru f(z) două valori:

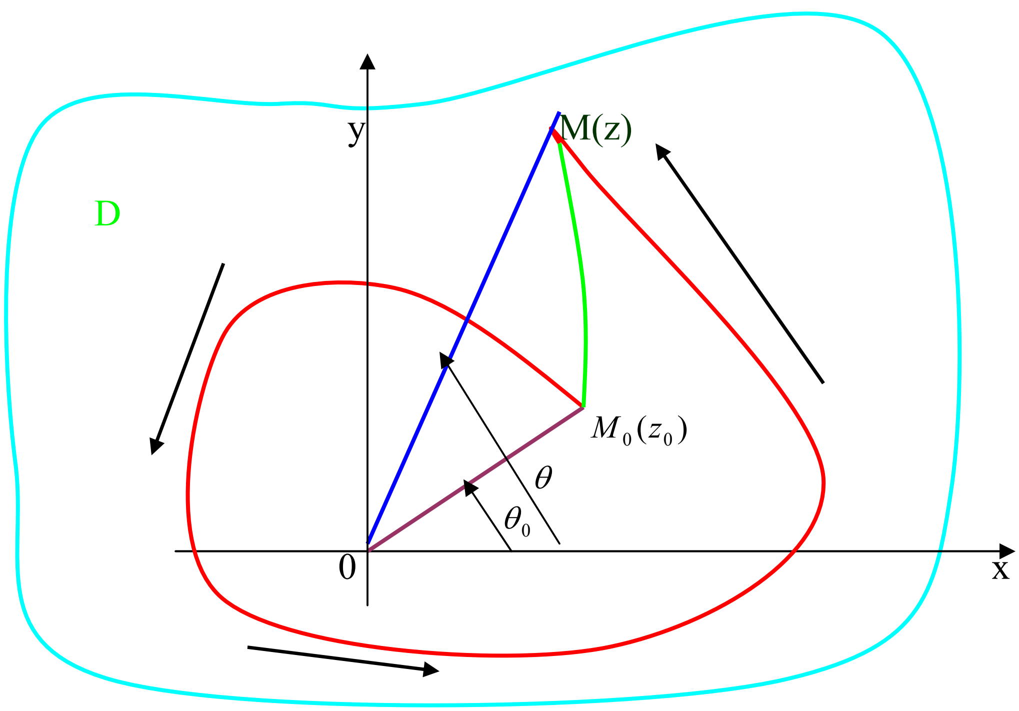
(1) $$f_1(z) = \sqrt{\rho} \cdot e^{i\frac{\theta}{2}}, f_2(z) = -\sqrt{\rho} \cdot e^{i\frac{\theta}{2}} .$$

Deci funcția radical este o funcție multiformă. Funcțiile f_1 şi f_2 se numesc ramurile funcției f(z).

Fie $M_0(z_0)$ şi $M(z)$ două puncte din planul complex (w) (figura) având respectiv argumentele θ_0 şi θ.

Dacă punctul z descrie arcul $\overline{M_0M}$ fără să înconjoare originea, atunci argumentul lui variază de la θ_0 la θ, iar valorile funcțiilor şi în punctul M(z) vor fi:

$$f_1(z) = \sqrt{\rho} \cdot e^{i\frac{\theta}{2}}, f_2 = -\sqrt{\rho} \cdot e^{i\frac{\theta}{2}} .$$



Dacă punctul z descrie un arc ce uneşte pe M_0 cu M înconjurând originea, atunci argumentul lui variază de la θ_0 la $\theta_0 + 2\pi$. Valorile funcțiilor f_1 şi f_2 în punctul M(z) vor fi:

(2) $$\begin{cases} f_1^*(z) = \sqrt{\rho}\cdot e^{i(\theta+2\pi)/2} = -\sqrt{\rho}\cdot e^{i\frac{\theta}{2}} = f_2(z) \\ f_2^*(z) = -\sqrt{\rho}\cdot e^{i(\theta+2\pi)/2} = \sqrt{\rho}\cdot e^{i\frac{\theta}{2}} = f_1(z) \end{cases}$$

Deci valorile funcțiilor f_1 şi f_2 se schimbă când punctul z descrie un arc ce înconjoară originea. Din acest motiv punctul z = 0 se numeşte *punct de ramificație* sau *punct critic* al funcției multiforme $f(z) = \sqrt{z}$.

Dacă în planul complex efectuăm o tăietură după o semidreaptă ce pleacă din origine, atunci argumentul punctului poate lua valori numai între 0 şi 2π, deoarece z nu mai poate descrie arcul care să înconjoare originea. Prin tăietura făcută funcțiile multiforme $f_1(z)$ şi $f_2(z)$ devin funcții uniforme.

Funcția $f(z) = \sqrt[n]{z}$. este o funcție multiformă, având n ramuri:

$f_{k+1}(z) = \sqrt[n]{\rho}\cdot e^{i(\theta+2k\pi)/n}$ $\qquad k \in \{0,1,2,...,n-1\}$.

Punctul z = 0 este punctul de ramificație sau punct critic al funcției f(z). Prin efectuarea unei tăieturi în planul complex printr-o semidreaptă ce pleacă din origine funcțiile $f_{k+1}(z)$ devin uniforme.

b) *Funcția exponențială* şi *funcția logaritmică.*

Definim funcția exponențială e^z prin:

(3) $$e^z = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^x(\cos y + i\sin y)$$

Aceasta este o funcție olomorfă în tot planul C.

Funcția e^z ia orice valoare din planul complex în afară de 0. Fie $w = \rho\cdot e^{i\theta}, \rho \neq 0$. Să determinăm pe z astfel încât: $e^z = w = \rho\cdot e.^{i\theta}$. Scriind z = x + iy, obținem $e^x = \rho, e.^{iy} = e^{i\theta}$, de unde:

(4) $x = \ln\rho$ şi $y = \theta + 2k\pi, k \in Z$.

Soluția generală a ecuației $e^z = w$ se numeşte logaritmul lui w, se notează Ln w şi are expresia:

(5) Ln $w = \ln\rho + i(\theta + 2k\pi)$

sau

(6) Ln $w = \ln|w| + i(\arg w + 2k\pi)$

unde arg w este argumentul principal al lui w. Pentru k = 0, obținem $Lnw = \ln|w| + i\arg w$ care se numeşte *valoarea principală* a lui Ln w şi se notează ln w. Deci:

(7) $\ln w = \ln|w| + i\arg w$.

Considerând pe w variabil punând în (6) în locul lui w pe z, obținem funcția logaritmică:

(8) $\text{Ln } z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)$

iar pentru k = 0 valoarea principală

(9) $\ln z = \ln|z| + i \arg z$.

Funcția logaritmică este o funcție multiformă având o infinitate de ramuri. Aceste ramuri devin funcții uniforme dacă efectuăm o tăietură după o semidreaptă ce pleacă din origine.

c) *Funcția* $f(z) = z^{\alpha}$. Dacă $z \neq 0$, atunci:

(10) $z^{\alpha} = e^{\alpha Lnz} = e^{\alpha \ln z} \cdot e^{2\pi \cdot i\alpha k}$

În raport cu α. distingem trei cazuri:

1. $\alpha \in Z$, deducem $e^{2\pi \cdot i\alpha k} = 1$ şi din (10) $z^{\alpha} = e^{\alpha \ln z}$ este o funcție uniformă în tot planul complex.

2. $\alpha \in Q, \alpha = \frac{p}{q}$ p,q întregi, prime între ele, $q \neq 0$. Obținem funcția multiformă $z^{\alpha} = \sqrt[q]{z^p}$ care are q ramuri şi z = 0 punct de ramificație.

3. $\alpha \in C$, funcția $f(z) = z^{\alpha}$ este o funcție multiformă cu o infinitate de ramuri.

d) Funcții circulare şi inversele lor. Funcții hiperbolice.

Funcțiile circulare sin z, cos z prin definiție sunt date de relațiile:

(11) $$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Deoarece e^{iz} are perioada 2π, sin z şi cos z au perioada 2π. Dezvoltarea în serie de puteri este:

(12) $$\begin{cases} \sin z = z - \dfrac{z^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n+1} \dfrac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \\ si \\ \cos z = 1 - \dfrac{z^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots \end{cases}$$

Funcția tg z se defineşte astfel:

(13) $$tgz = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i} \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}$$

şi are perioada π.

Funcția w = f(z), definită de

(14) cosw=z

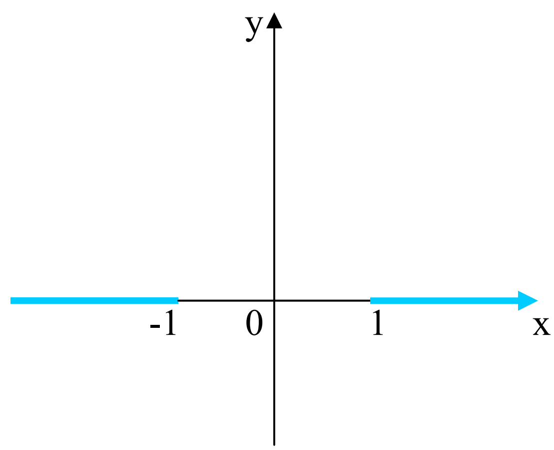
se numeşte arccos şi se notează:w =Arccos z. Din (11) şi (14) obținem: $e^{iw} = z \pm i\sqrt{1 - z^2}$ şi deci:

(15) $$Arc\cos z = \frac{1}{i} Ln(z \pm i\sqrt{1 - z^2})$$

Funcția

(16) $\arccos z = \frac{1}{i}\ln(z \pm i\sqrt{1-z^2})$

se numeşte determinarea principală a funcției multiforme Arccos z. Funcția (15) are o infinitate de ramuri şi două puncte critice $z = \pm 1$. Aceste ramuri devin funcții uniforme, dacă efectuăm în planul complex două tăieturi de forma:



Funcția w = Arcsin z este definită de ecuația sin w = z. Obținem:

(17) $Arc\sin z = \frac{1}{i}Ln(iz \pm \sqrt{1-z^2})$

Funcția

(18) $Arc\sin z = \frac{1}{i}\ln(iz \pm \sqrt{1-z^2})$

se numeşte determinarea principală a lui Arcsin z. Putem scrie:

(19) $Arc\sin z = \begin{cases} 2k\pi + \arcsin z \\ (2\pi+1)k - \arcsin z \end{cases}$

Funcția w = Arctg z se defineşte prin ecuația tg w = z, de unde $e^{2iw} = \frac{i-z}{i+z}, z \neq \pm i$ deci $Arctgz = \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{i-z}{i+z}\right)$ care este o funcție multiformă având o infinitate de ramuri şi ca puncte critice pe $\pm i$.

Determinarea principală a lui Arctg z este :

(20) $arctgz = \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{i-z}{i+z}\right)$.

Funcțiile hiperbolice sh z şi ch z se definesc prin formulele:

(21) $\text{sh } z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \text{ch } z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$.

De aici observăm că: cos iz=ch z, sin iz=i sh z,ch^2z-sh^2z=1 . Aceste funcții hiperbolice ca şi e^z sunt funcții periodice de perioadă 2π i.

16. **Probleme propuse.**

1. Să se studieze seriile următoare:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2i)^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos in}{2^n}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in^2}}{n^3}$.

2. Să se calculeze:

$$\int_0^1 \frac{3+2it}{1-it}dt .$$

3. Să se determine funcția olomorfă f(z) = u(x,y) + iv(x,y) când:

a) $u(x,y)=\ln(x^2+y^2), f(1)=0; R:(f(z)=2\ln z);$;

b) $v(x,y)=\frac{sh2y}{\cos 2x + ch2y}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1; R:(f(z)=tgz)$;

c) $u(x,y)=\varphi(x+\sqrt{x^2+y^2}), f(0)=0, f^{/}(1)=\frac{1}{2}; \varphi$ derivabilă

$R:(f(z)=\sqrt{z})$.

4. Să se studieze transformarea conformă:

$w = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$ şi să se afle imaginea cercului $|z| = 1$ din planul (z).

5. Să se dezvolte în serie Laurent funcția:

$f(z) = \frac{2z+3}{z^2 - 3z + 2}$ în domeniile: a) $|z| < 1$; b) $1 < |z| < 2$; c) $|z| > 2$.

6. Să se calculeze : $\int_C \frac{e^{i\pi z}}{z^2 + 1} dz, unde (C): 4x^2 + y^2 = 4$.

7. Folosind teorema reziduurilor să se calculeze:

a) $\int_{|z|=1} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z(1-z)} dz$;

b) $\int_C \frac{dz}{(z-1)(z^2+1)}, unde C: x^2 + y^2 = 2x + 2y.$;

c) $\int_C \frac{z dz}{(z-1)(z^2+4)}, unde C: |z| = 3..$

8. Să se calculeze integralele:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^6+1} dx$;

b) $\int_{0}^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx dx, a>0, b\in R$ (*integrala lui Poisson*);

c) $I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2-6x+13} dx$ şi $I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2-6x+13} dx$;

d) $\int_{0}^{2\pi} \frac{d\theta}{(5+4\cos\theta)^2}$;

e) $\int_{0}^{2\pi} \frac{\cos n\theta}{1-2a\cos\theta+a^2} d\theta, a>1, n\in N^*$.

9. Să se calculeze :

a) $z = i^i$;

b) $z = \text{sh}(1-i)$.

10. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\sin z = 2$ **;**

b) $tgz = \frac{1-3i}{5}$ **;**

c) ch z –sh z=1.

CAPITOLUL III

FUNCȚII SPECIALE

1. Sisteme de funcții ortogonale. Polinoamele lui Laguerre. Polinoamele lui Cebîşev.

Fie $(f_n(x))_{n\in N} \in L^2(\Omega), \Omega \subset R^p$, un sistem de funcții (reale sau complexe) de pătrat integrabil pe Ω.

Definiție. Sistemul de funcții $\{f_n\}_{n\in N}$ este un *sistem ortogonal* pe $\Omega \subset R^p$, dacă:

$$(f_m, f_n) = \int_\Omega f_m(x) f_n(x) dx = \begin{cases} 0, m \neq n \\ C_n > 0, m = n \end{cases}.$$

Dacă pentru orice $n \in N$ avem $C_n = 1$, atunci sistemul de funcții $(f_n(x))_{n\in N}$ se numeşte *ortonormat.*

Propoziția 1. Fie $\{f_n(x)\}_{k\in N}$ un sistem ortogonal de funcții din $L^2(\Omega)$. Atunci sistemul de funcții $\left\{\frac{f_k(x)}{\|f_k\|}\right\}_{k\in N}$ este un sistem ortonormat de funcții din $L^2(\Omega)$.

Propoziția 2. Sistemul trigonometric:

(1) $1, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \cos\frac{2\pi x}{l}, \sin\frac{2\pi x}{l}, ..., \cos\frac{n\pi x}{l}, \sin\frac{n\pi x}{l}, ...$ este un sistem ortogonal pe intervalul $(-l,l)$ şi $(f_n(x), f_m(x)) = \int_{-l}^{l} f_n(x) f_m(x) dx = \begin{cases} 0, m \neq n \\ l, m = n \end{cases}$ unde $f_k(x)$ este un element oarecare al şirului (1) $k \in N$.

Demonstrație. Pentru orice $n \in N^*$, avem:

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi x}{l}\right)\Big|_{-l}^{l} = 0;$$

$$\int_{-l}^{l} \sin\frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi x}{l}\right)\Big|_{-l}^{l} = 0;$$

$$\int_{-l}^{l}\cos^2\tfrac{n\pi x}{l}dx=\tfrac{1}{2}\left(1+\cos\tfrac{2n\pi x}{l}\right)\Big|_{-l}^{l}=l\,;$$

$$\int_{-l}^{l}\sin^2\tfrac{n\pi x}{l}dx=\tfrac{1}{2}\left(1-\cos\tfrac{2n\pi x}{l}\right)\Big|_{-l}^{l}=l.\,;$$

De asemenea, pentru orice m,n întregi, $m\neq n$, avem:

$$\int_{-l}^{l}\cos\tfrac{n\pi x}{l}\cos\tfrac{m\pi x}{l}\,dx=\tfrac{1}{2}\int_{-l}^{l}[\cos(n+m)\tfrac{\pi x}{l}+\cos(n-m)\tfrac{\pi x}{l}]dx=0 \text{ etc.}$$

Formulele de mai sus, arată că sistemul (1) este un sistem ortogonal pe intervalul $(-l,l)$.

Normalizând (1) obţinem şirul fundamental ortonormat:

(2) $$\frac{1}{\sqrt{2l}},\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\tfrac{\pi x}{l},\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\tfrac{\pi x}{l},\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\tfrac{2\pi x}{l},\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\tfrac{2\pi x}{l},...,\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\tfrac{n\pi x}{l},\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\tfrac{n\pi x}{l},...$$

Efectuând schimbarea de variabilă $\frac{\pi x}{l}=t$, sistemul (1) devine :

(3) 1,cos t,sin t, cos 2t, sin 2t, ... , cos nt, sin nt, ...

Normalizând sistemul trigonometric (3), obţinem sistemul ortonormat :

(4) $$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t,\tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t,\tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2t,\tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2t,...,\tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt,\tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt,... \quad .$$

<u>Definiţie.</u> Fie $\{\ f_k(x)\ \}_{k\in N}$ un sistem de funcţii de pătrat integrabil pe Ω şi p(x) o funcţie reală de pătrat integrabil pe Ω . Sistemul de funcţii $\{\ f_k(x)\ \}_{k\in N}$ este ortogonal cu ponderea p(x) pe Ω, dacă :

$$(f_m(x),p(x)f_n(x))=\int_{\Omega}p(x)f_m(x)\overline{f_n(x)}dx=\begin{cases}0,m\neq n\\ C_n>0,m=n\end{cases}.$$

Exemplu.

<u>Polinoamele lui Laguerre</u>.

Numim *polinom Laguerre* polinomul definit prin relaţia:

(5) $$L_n(x)=e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x}),n\in\{0,1,2,...\}$$

unde $x\geq 0$.

Polinoamele lui Laguerre reprezintă un sistem ortogonal de funcţii cu ponderea $p(x)=e^{-x}$ pe intervalul $(0,\infty)$ şi

$$(L_n(x), e^{-x}L_m(x)) = \int_0^\infty e^{-x}L_n(x)L_m(x)dx = \{0, pentru, n \neq m; (n!)^2, pentru, n = m\}.$$

Polinoamele lui Laguerre verifică ecuaţia diferenţială: $xy'' + (1-x)y' + ny = 0$ şi $L^*_n(x) = \frac{1}{n!}e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$ formează un şir ortonormat cu ponderea e^{-x} pe intervalul $(0, \infty)$.

În mod analog se arată că polinoamele lui Cebâşev $T_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n \arccos x), n \in \{0,1,2,...\}$ sunt polinoame ortogonale cu ponderea $p(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ pe intervalul (-1,1); ele verifică ecuaţia $(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$ precum şi relaţia de recurenţă:

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0, n \in \{1,2,...\}. \ .$$

2. <u>Funcţiile lui Euler</u>.

Numim *funcţia lui Euler de speţa II*, sau *funcţia gama*, funcţia complexă $\Gamma(z)$ definită de integrala:

(1) $$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt, \quad z = x + iy, x > 0.$$

Observăm că putem scrie:

$$\Gamma(z) = \int_0^1 t^{z-1}e^{-t}dt + \int_1^\infty t^{z-1}e^{-t}dt \ .$$

Pentru a arăta convergenţa integralei improprii observăm că:

$$\left|\int_a^1 e^{-t}t^{z-1}dt\right| \leq \int_a^1 e^{-t}\left|t^{z-1}\right|dt = \int_a^1 e^{-t}t^{x-1}\left|t^{iy}\right|dt = \int_a^1 e^{-t}t^{x-1}dt, a > 0$$

$(\left|i^{iy}\right| = 1)$.

Pentru 0<t<1,e^{-t}<1 şi obţinem:

$$\left|\int_a^1 e^{-t}t^{z-1}dt\right| \leq \int_a^1 t^{x-1}dt = \frac{1-a^x}{x}, a > 0, x > 0 \ .$$

Pentru,a$\to 0$ membrul al doilea devine $\frac{1}{x}$ ceea ce arată că integrala improprie $\int_0^1 t^{z-1}e^{-t}dt$ este convergentă pentru x>0 .

Pentru a doua integrală improprie $\int_1^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$ observăm că, $\left|\int_1^b e^{-t}t^{z-1}dt\right| \le \int_1^b e^{-t}t^{x-1}dt, b>1$ care este convergentă (criteriul integral a lui Cauchy) deoarece seria $\sum u_n,\ u_n = \frac{n^{x-1}}{e^n}$ şi integrala $\int_1^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ au aceeaşi natură ($\int_1^\infty f(x)dx$ convergentă $\Leftrightarrow$ seria $\sum_1^\infty f(n)$ este convergentă , $f(x) = e^{-t}t^{x-1}$).
($\sum u_n$ este convergentă(criteriul raportului)). Deci $\Gamma(z)$ este convergentă.

Propoziție. Funcția $\Gamma(z)$ verifică ecuația funcțională

(2) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

Într-adevăr, integrând prin părți, obținem:

$$\Gamma(z+1) = -\int_0^\infty t^z d(e^{-t}) = -t^z e^{-t}\Big|_0^\infty + z\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt = z\Gamma(z),$$

deci ecuația (2). Scriind formula (2) pentru $z \in \{z, z+1, z+2, ..., z+n\}$ şi apoi înmulțind relațiile astfel obținute găsim:

(3) $\Gamma(z+n+1) = z(z+1)...(z+n)\Gamma(z)$.

Pentru z =1 avem:

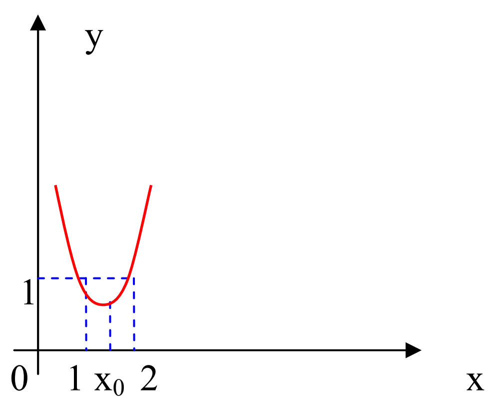
$\Gamma(n+2) = (n+1)!\Gamma(1)$ şi deoarece $\Gamma(1) = 1$

obținem:

(4) $\Gamma(n+1) = n!$.

Datorită proprietăților(3) şi (4) funcția Γ se mai numeşte *funcție factorial*.

Dacă $x \in R_+$ graficul funcției $\Gamma(x)$ este:



($\Gamma''(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}(\ln t)^2\,dt>0$ deci $\Gamma(x)$ este o funcție convexă). Funcția $\Gamma(z)$ are proprietatea:

(5) $$\Gamma(z)\cdot\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin \pi z}$$

numită *ecuația complementelor*. Între valorile importante ale funcției $\Gamma(z)$ avem:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt=2\int_0^\infty e^{-u^2}du=\sqrt{\pi}\quad .$$

Înlocuind variabila de integrare t cu t^2 în formula (1) obținem:

(6) $$\Gamma(z)=2\int_0^\infty e^{-t}t^{2z-1}dt\ .$$

Numim *funcția lui Euler de speța I* funcția definită prin relația:

(7) $$B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt,\ \text{Rep}>0,\ \text{Req}>0.$$

Funcția $B(p,q)$ este simetrică în raport cu p şi q adică $B(p,q)=B(q,p)$. Are loc următoarea:

<u>Teoremă</u>**.** Funcția lui Euler de speța I, $B(p,q)$ verifică relația:

(8) $$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},\ \text{Rep}>0,\ \text{Req}>0.$$

<u>Demonstrație</u>

Folosind formula (6) pentru funcția, $\Gamma(z)$ putem scrie:

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)}u^{2p-1}v^{2q-1}dudv\,.$$

Trecând de la coordonatele polare $u=\rho\cos\theta, v=\rho\sin\theta$ obținem:

$$\Gamma(p)\ \Gamma(q)=4\iint e^{-\rho^2}\rho^{2(p+q)-1}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta d\rho d\theta=2\Gamma(p+q)\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta d\theta\ .$$

$$\rho\geq 0, 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$$

Pe de altă parte, făcând substituția $t=\cos^2\theta$ observăm că

B(p,q)= $2\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta d\theta$. Cu aceasta, relația de mai sus dă formula (8).

3. **Funcțiile Bessel.**

Fie ν un număr real sau complex. Ecuația diferențială:

(1) $$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

se numeşte *ecuația lui Bessel*.

Definiția 1. Numim *funcții Bessel* sau *funcții cilindrice* soluțiilor ecuației lui Bessel. Aceste funcții apar la rezolvarea ecuațiilor fizicii matematice, teoria potențialului, precum şi la studiul vibrațiilor proprii ale membranelor circulare. Vom căuta soluția ecuației lui Bessel sub forma unei serii de forma:

(2) $$y(x)=x^r\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

unde r şi a_k trebuie astfel determinate încât seria (2) să verifice ecuația lui Bessel (1).

Din (2) obținem:

(3) $$\begin{cases} y' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+r)x^{k+r-1} \\ y'' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+r)(k+r-1)x^{k+r-2} \end{cases} .$$

Înlocuind în ecuația lui Bessel şi simplificând cu x^r obținem:

(4) $$\sum_{k=0}^{\infty} a_k [(k+r)^2 - \nu^2]x^k = -\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad .$$

Prin identificare, obținem relațiile:

(5) $$\begin{cases} a_0(r^2 - \nu^2) = 0, \\ a_1[(r+1)^2 - \nu^2] = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_k[(r+k)^2 - \nu^2] = -a_{k-2}, k \in \{2,3,4,...\} \end{cases}$$

Presupunând $a_0 \neq 0$ (fapt posibil întotdeauna, prin schimbarea indicelui de sumare) obținem $r^2 - \nu^2 = 0$,de unde $r = \nu$ şi $r = -\nu$.

Cazul 1. Considerăm $r = \nu$. Din a doua relație din (5) obținem $a_1(2\nu + 1) = 0$. Cum coeficientul intervine în ecuația lui Bessel la pătrat, atunci dacă ν este real putem considera $\nu \geq 0$ deci $2\nu + 1 \neq 0$ de unde $a_1 = 0$. Dacă ν este complex, atunci evident $2\nu + 1 \neq 0$ şi $a_1 = 0$. În concluzie, putem considera $a_1 = 0$ întotdeauna . Din relația de recurență,

$a_k[(\nu + k)^2 - \nu^2] = -a_{k-2}$ ($k \geq 3$) obținem:

(6) $a_1 = a_3 = a_5 = ... = a_{2k+1} = ... = 0, k \in \{0,1,2,3,...\}$.

Deci toți coeficienții de indici impari ai seriei (2) sunt 0. Pentru coeficienții de ordin par, considerând k=2n, avem:

(7) $a_{2n}(4n^2 + 4n\nu) = -a_{2n-2}, n \in \{1,2,3,...\}$,

sau

(8) $4n(n + \nu)a_{2n} = - a_{2n-2}, \quad n \in \{1,2,3,...\}$.

Făcând pe n din (8) 1,2,...,n şi înmulțind termen cu termen aceste egalități, obținem:

(9) $$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n} n!(\nu + 1)(\nu + 2)...(\nu + n)}.$$

Deoarece $\Gamma(z + n + 1) = z(z + 1)...(z + n)\Gamma(z)$ şi $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$ observăm că:

(10) $$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0 \Gamma(\nu + 1)}{2^{2n} n! \Gamma(\nu + n + 1)}, n \in \{0,1,2,...\}.$$

Deoarece a_0 este arbitrar, considerăm că $a_0\Gamma(\nu + 1) = 2^{-\nu}$ şi astfel pentru soluția ecuației lui Bessel găsim:

(11) $$y = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\nu + n + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}.$$

Cu ajutorul criteriului lui D`Alembert se verifică imediat că seria de puteri (11) are raza de convergență infinită.

Definiția 2. Funcția definită de (11) se numeşte *funcția lui Bessel de speța I* şi de ordin (indice) ν şi se notează $I_\nu(x)$ Deci:

(12) $$I_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\nu + n + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

Cazul 2. Considerăm r=-ν . Dacă $\nu \neq n$, $n \in \{1,2,3,...\}$, deci ν nu este număr întreg şi pozitiv atunci toți coeficienții de ordin impar sunt nuli, iar cei de ordin par

se obțin din (9) înlocuind pe v cu $-v$. Luând pentru valoarea, $a_0\Gamma(-v+1)=2^v$ obținem pentru ecuația (1) a lui Bessel soluția:

(13) $$I_{-v}(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{-v}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(-v+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n},v\neq n \quad .$$

Ca şi în cazul precedent se arată că seria (13) este convergentă pentru orice x. Cele două soluții sunt liniar independente. În consecință, soluția generală a ecuației lui Bessel va fi:

(14) $$y(x)=C_1I_\upsilon(x)+C_2I_{-\upsilon}(x),\ v\neq n\,.$$

*Funcții Bessel de indice întreg pozitiv***.** Pentru $v=p$ număr întreg ($p\geq 1$) obținem:

(15) $$I_{-p}(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{-p}\sum_{n=p}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(-p+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \quad .$$

şi $I_{-p}(x)=(-1)^pI_p(x)$.

<u>Definiția 3</u>. Numim *funcția lui Bessel de speța II* sau *funcția lui Neumann* de ordinul v funcția definită prin relația:

(16) $$N_v(x)=\frac{\cos v\pi I_v(x)-I_{-v}(x)}{\sin v\pi},v\neq n$$

fiind număr întreg. Funcția $N_v(x)$ este soluție a ecuației lui Bessel.

4. <u>Polinoame Hermite. Relația de recurență.</u> <u>Ecuația diferențială.</u> <u>Proprietăți.</u> <u>Funcția generatoare.</u>

Aceste polinoame apar la studiul oscilatorului armonic liniar în mecanica cuantică.

<u>Definiție</u>. Numim *polinom Hermite* polinomul definit prin relația:

(1) $$H_n(x)=(-1)^ne^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right),\ n\in\{0,1,2,3,...\}.$$

Pentru $n\in\{0,1,2,3\}$ găsim:

$$H_0(x)=1,H_1(x)=2x,\ \ H_2(x)=4x^2-2,H_3(x)=8x^3-12x.$$

Observăm că grad$H_n(x)$. Dacă n este impar, atunci polinomul H_n conține numai termeni cu puteri impare ale lui x, iar pentru n par $H_n(x)$ conține numai termeni cu puteri pare ale lui x.

Notăm $u(x)=e^{-x^2}$. Avem $u'=-2xe^{-x^2}$ şi aplicând formula lui Leibniz de derivare, obținem:

$u^{(n+2)}(x)=\left(-2xe^{-x^2}\right)^{(n+1)}=-2\left[(n+1)u^{(n)}(x)+xu^{(n+1)}(x)\right]$,de unde

(2) $$u^{(n+2)}(x)+2xu^{(n+1)}(x)+2(n+1)u^{(n)}(x)=0$$.

Înmulțind relația (2) cu $(-1)^{n+2}e^{x^2}$ se obține formula de recurență:

(3) $$H_{n+2}(x)-2xH_{n+1}(x)+2(n+1)H_n(x)=0$$.

Observăm că $u^{(n)}(x)=(-1)^n e^{-x^2}H_n(x)$.

Înlocuind aceasta în (2) obținem ecuația diferențială a polinoamelor lui Hermite:

(4) $$y''-2xy'+2ny=0.$$

Propoziție. Polinoamele Hermite sunt funcții ortogonale cu ponderea p(x)=e^{-x^2} pe intervalul $(-\infty,\infty)$ şi:

(5) $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_m(x)H_n(x)dx=\begin{cases}0, m\neq n\\ 2^n n!\sqrt{\pi}, m=n\end{cases}.$$

Demonstrație. Integrând prin părți obținem I=0 pentru $m\neq n$,si pentru $m=n$, I=$2^n n!\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=2^n n!\sqrt{\pi}$.

Polinoamele lui Hermite se pot obține din funcția generatoare:

(6) f(x,t)= $e^{2tx-t^2}=e^{x^2}e^{-(t-x)^2}$.

Dezvoltând în serie Taylor în raport cu t, obținem:

(7) f(x,t)= $\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)\frac{t^n}{n!}$

unde coeficienții $H_n(x)$ ai seriei de puteri (7) reprezintă polinoamele lui Hermite abstracție făcând de un factor de proporționalitate.

Avem: $\frac{\partial f}{\partial x}=2tf, \frac{\partial f}{\partial t}+2(t-x)f=0$ de unde găsim relația de recurență (3).

5. Polinoame Legendre. Relația de recurență. Ecuația diferențială. Proprietăți. Funcția generatoare.

Polinoamele lui Legendre intervin în studiul ecuației lui Laplace, în teoria potențialului, etc.

<u>Definiție</u>. Numim *polinom Legendre* polinomul definit prin relația:

(1) $L_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]$, $n\in\{0,1,2,...\}$.

Această formulă se mai numeşte *formula lui Rodrigues*. Pentru deducerea proprietăților acestor polinoame vom nota $u(x)=(x^2-1)^n$. Derivând, avem, $u'(x)=2nx(x^2-1)^{n-1}$ de unde:

(2) $(x^2-1)u'(x)-2nxu(x)=0$.

Derivând relația (2) de (n+1) ori după formula lui Leibniz obținem:

$$(x^2-1)u^{(n+2)}(x)+2xu^{(n+1)}(x)-n(n+1)u^{(n)}(x)=0.$$

Înmulțind această ecuație cu $1/(2^n n!)$ şi ținând seama că $u^{(n)}(x)=\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]$ relația de mai sus devine:

(3) $(x^2-1)L''_n(x)+2xL'_n(x)-n(n+1)L_n(x)=0$.

Deci polinoamele lui Legendre verifică ecuația diferențială:

(4) $(x^2-1)y''+2xy'-n(n+1)y=0$.

Polinomele lui Legendre se pot obține din funcția generatoare:

(5) $f(\rho,x)=\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho x}},\rho\in(0,1),x\in[-1,1]$.

Pentru a vedea semnificația acestei funcții vom presupune că în punctul M_0 din spațiu există o sarcină electrică pozitivă egală, cu unitatea. Această sarcină creează un câmp electrostatic a cărui valoare într-un punct $M\neq M_0$ este

$$E(M)=\frac{1}{R^2},R=M_0M.$$

Potențialul câmpului electrostatic se notează cu V(M)=1/R. Notând cu O originea reperului şi cu $x=\cos\theta,\theta=\angle(OM_0,OM)$ obținem din triunghiul OMM_0: $R=\sqrt{r^2+r_0^2-2r_0rx}$, unde r=OM, $r_0=OM_0$. În consecință, potențialul corespunzător punctului M va fi:

$$V(M)=\frac{1}{R}=\begin{cases}\frac{1}{r_0}\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho\, x}},\rho=\frac{r}{r_0}<1\\ \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho\, x}},\rho=\frac{r_0}{r}<1\end{cases}.$$

În ambele cazuri apare funcția generatoare $f(\rho,x)$ a polinoamelor lui Legendre cu restricțiile $x\in[-1,1]$ și $\rho\in[0,1]$. Considerând pe ρ suficient de mic putem dezvolta în serie după puterile lui ρ, obținând:

$$(6)\qquad \begin{cases} f(x,\rho)=\left[1+(\rho^2-2\rho x)\right]^{-\frac{1}{2}}=1+(\rho^2-2\rho x)\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}(\rho^2-2\rho x)^2+\ldots= \\ =1+\rho x+\rho^2\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)+\rho^3\left(\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x\right)+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}L_n(x)\rho^n \end{cases}.$$

Polinoamele $L_n(x)$ sunt polinoamele lui Legendre.

Luând, de exemplu, x=1 obținem:

$$f(1,\rho)=1+\rho+\rho^2+\ldots$$

adică $L_n(1)=1$, $n\in\{0,1,2,\ldots\}$.

Polinoamele lui Legendre verifică relația de recurență:

$$(7)\qquad (n+1)L_{n+1}(x)-(2n+1)xL_n(x)+nL_{n-1}(x)=0.$$

Pentru a obține relația de recurență (7) derivăm expresia (5) şi obținem:

$$(8)\qquad (1-2\rho x+\rho^2)\frac{\partial f}{\partial \rho}-(x-\rho)f=0.$$

Substituind în (8) expresia (6) a lui f, obținem:

$$(1-2\rho x+\rho^2)\sum_{n=1}^{\infty}nL_n(x)\rho^{n-1}+(\rho-x)\sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)\rho^n=0.$$

Egalând cu zero coeficientul lui ρ^n obținem (7).

***Propoziție*.** Polinoamele lui Legendre sunt funcții ortogonale pe [-1,1] şi

$$\int_{-1}^{1}L_n(x)L_m(x)dx=\begin{cases}0, m\neq n\\ 2/(2n+1), m=n\end{cases}.$$

6. Probleme propuse.

1. Să se calculeze integrala: .

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^4 x dx \ .$$

2. Să se calculeze integrala:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(1+x^6)^3} .$$

3. Să se calculeze integrala:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^8} .$$

4. Să se dezvolte în serie de polinoame Legendre funcțiile:

a) $f(x) = x$;

b) $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{2}}$.

5. Să se integreze ecuația lui Bessel:

$$x^2 \cdot y'' + x \cdot y' + \left(9x^2 - \tfrac{1}{4}\right) \cdot y = 0 \ .$$

CAPITOLUL IV

SERII FOURIER

1. Serii Fourier pentru funcţii. Funcţii periodice. Transformata periodică. Dezvoltarea în serie Fourier a unei funcţii periodice cu perioada 2π. Exemplu.

Funcţiile periodice constituie una din clasele de funcţii care datorită proprietăţilor lor intervin frecvent în diverse probleme teoretice şi practice. Un mijloc de reprezentare şi studiu al acestor funcţii îl constituie dezvoltarea în serie Fourier. În multe cazuri dezvoltarea în serie Fourier este mai convenabilă decât dezvoltarea în serie Taylor.

Termenii unei serii Fourier sunt funcţii periodice cu care putem descrie fenomene oscilatorii. O altă calitate a seriilor Fourier este şi aceea că termenii săi au proprietatea de ortogonalitate.

Spunem că funcţia $f: R \to \Gamma(\Gamma = \mathbf{R} \vee \mathbf{C})$ este o funcţie *periodică* de perioadă T > 0 dacă: $f(x+T) = f(x), \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}$. Dacă T este perioada funcţiei f(x) atunci şi kT, $k \in Z,^*$ este perioadă. Fie supp f =[a,b] . Numim *transformata periodică* a funcţiei f , funcţia $\omega_T f : R \to \Gamma$, definită prin relaţia $\tilde{f}_T(x) = \omega_T f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+kT), x \in R$, . Transformata periodică $\tilde{f} = \omega_T f(x)$ este o funcţie periodică de perioadă T.

Definiţia 1. Prin *polinom trigonometric* de ordinul n înţelegem funcţia:

(1) $$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

unde coeficienţii $a_0, a_k, b_k (k \in \{1,2,...,n\})$ sunt numere reale.

Observăm că polinomul $T_n(x)$ din (1) este o funcţie periodică de perioadă $T = 2\pi$.

Definiţia 2. Numim serie trigonometrică seria de forma:

(2) $$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad .$$

Dacă seria trigonometrică (2) este convergentă , atunci suma ei f(x) va fi o funcţie periodică de perioadă T=2π. Seria trigonometrică s-a obţinut cu ajutorul sistemului trigonometric fundamental :

(3) $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x..., \cos nx, \sin nx,...$

Acest sistem este un sistem de funcţii ortogonal şi :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \pi \ .$$

Fiind dată o funcție f(x), $f: R \to R$, periodică cu perioada 2π, se cere să se determine condițiile pe care trebuie să le îndeplinească funcția periodică f(x) astfel încât să putem construi seria trigonometrică (2) , uniform convergentă pe $[-\pi,\pi]$, deci şi pe **R**. În aceste ipoteze putem scrie egalitatea :

(4) $$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad .$$

Seria fiind uniform convergentă , putem integra termen cu termen şi în baza ortogonalității sistemului (3) găsim :

(5) $$a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \quad .$$

Înmulțind seria (4) cu $\cos kx$ şi integrând , obținem :

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx = a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos \ kxdx = \pi a_k$, de unde:

(6) $$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx \ .$$

Procedând analog, prin înmulțire cu $\sin kx$, obținem :

(7) $$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx \ .$$

Coeficienții $a_{k,}b_k$, $k \in \{1,2,3,...\}$ determinați după formulele (6) şi (7) se numesc *coeficienții Fourier* pentru funcția f(x) iar seria trigonometrică (2) cu aceşti coeficienți se numeşte *seria Fourier* a funcției periodice f(x).

Fiind dată o funcție periodică f cu perioada 2π şi integrabilă, putem determina coeficienții Fourier corespunzători funcției date precum şi seria Fourier ataşată lui f (x). Nu putem însă să scriem egalitatea (4) deoarece nu ştim dacă seria este convergentă şi chiar în caz de convergență , nu ştim dacă suma ei este tocmai funcția f . Din acest motiv vom scrie :

(8) $$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \ .$$

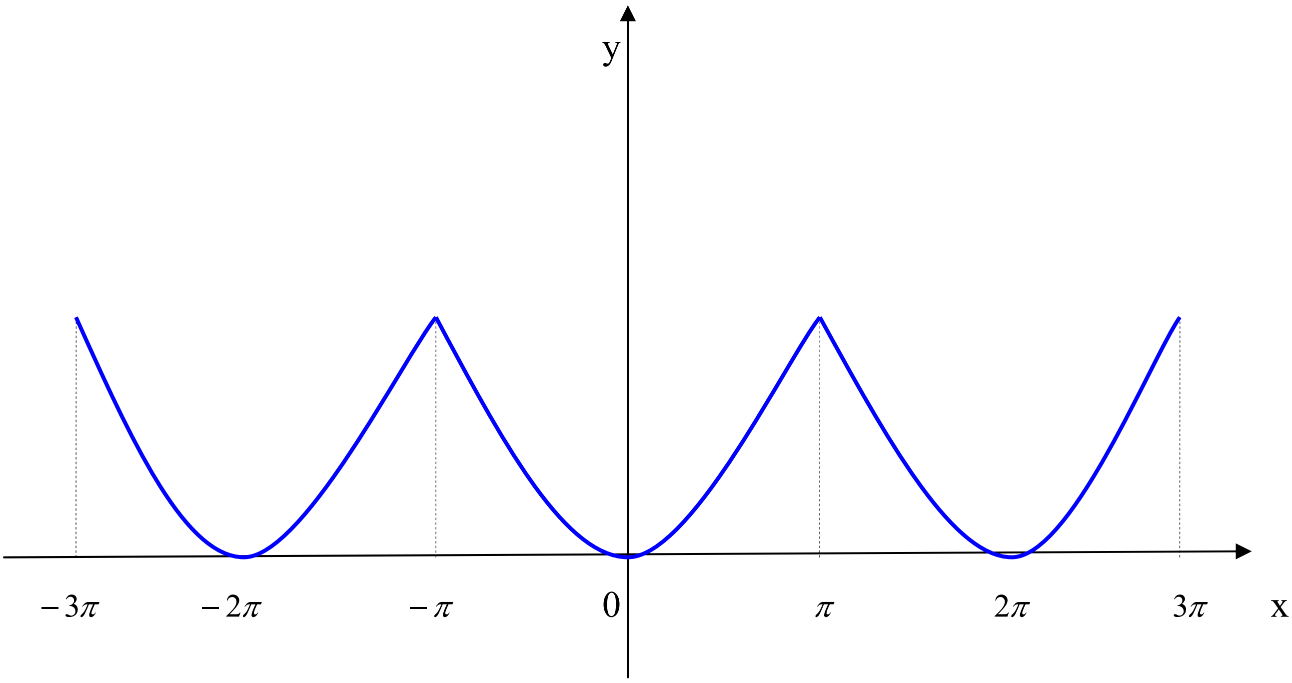
Condițiile suficiente pentru ca o funcție periodică cu perioada 2π să poată fi reprezentată prin seria Fourier asociată ei , au fost găsite de Dirichlet. Are loc:

Teorema (Condițiile lui Dirichlet). Dacă funcția f(x) cu perioada 2π este monotonă pe porțiuni şi mărginită pe intervalul $[-\pi,\pi]$, atunci seria Fourier asociată acestei funcții este convergentă în toate punctele. Suma S(x) a seriei Fourier în fiecare punct de continuitate este egală cu valoarea funcției f în acel punct. În punctele de discontinuitate , valoarea sumei S(x) este egală cu media aritmetică a limitelor laterale corespunzătoare punctului de discontinuitate , adică:

(9) $S(c)=\dfrac{f(c-0)+f(c+0)}{2}$ unde ,

$f(c-0)=\lim\limits_{\substack{x\to c\\ x<c}} f(x), f(c+0)=\lim\limits_{\substack{x\to c\\ x<c}} f(x)$.

Exemplu. Considerăm funcția $f(x)=\dfrac{x^2}{4}, x\in[-\pi,\pi],$. Funcția periodică generată de funcția f(x) va fi transformata periodică f cu perioada 2π al cărei grafic este :



Funcția f(x) reprezintă restricția funcției $\tilde{f}$ la intervalul $[-\pi,\pi]$. Condițiile teoremei lui Dirichlet sunt îndeplinite, deoarece funcția f pe intervalul $[-\pi,\pi]$ este monotonă şi este mărginită. Aplicând de două ori integrarea prin părți obținem pentru coeficienții Fourier expresiile :

$$b_k=0, a_k=\frac{(-1)^k}{k^2}, k\neq 0, a_0=\frac{\pi^2}{6} .$$

Deci seria Fourier corespunzătoare funcției $f(x)=\dfrac{x^2}{4}$ în intervalul $[-\pi,\pi]$ este :

$$\frac{x^2}{4}=\frac{\pi^2}{12}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos kx=\frac{\pi^2}{12}-\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 2x}{2^2}+...$$

Considerând $x=\pi$ obținem suma:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{n^2}+...=\frac{\pi^2}{6} .$$

2. Seria Fourier a funcțiilor pare sau impare.

Dacă funcția f(x) este pară sau impară pe $[-\pi,\pi]$ atunci dezvoltarea în serie Fourier a ei se simplifică. Astfel , dacă funcția f(x) este pară pe $[-\pi,\pi]$, atunci f(-x) = f(x) şi în consecință funcția $f(x)\cos kx$ este pară iar funcția $f(x)\sin kx$ este impară. Ținând seama de aceasta vom obține:

$$(1)\qquad \begin{cases} b_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = 0, a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\pi} f(x)dx \\ a_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\pi} f(x)\cos kx dx \end{cases}$$

Pentru funcțiile pare pe $[-\pi,\pi]$ seria Fourier va conține numai termeni în cosinusuri , adică termenii pari. Deci seria Fourier va avea expresia:

$$(2)\qquad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \qquad ,$$

valabilă în punctele de continuitate ale funcției f(x) pe $(-\pi,\pi)$. Acest caz a fost ilustrat prin exemplul din paragraful anterior $f(x) = \frac{x^2}{4}$, care este o funcție pară pe $[-\pi,\pi]$ (axa Oy axă de simetrie).

Dacă funcția f(x) este impară pe intervalul $[-\pi,\pi]$, atunci funcția $f(x)\cos kx$ este impară , iar $f(x)\sin kx$ este o funcție pară. În consecință coeficienții seriei Fourier vor fi :

$$(3)\qquad a_o = 0, a_k = 0 \quad \text{şi} \quad b_k = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin kx dx \ .$$

Seria Fourier pentru funcțiile impare va conține numai termenii în sinusuri, deci :

$$(4)\qquad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \ .$$

3. Dezvoltarea în serie Fourier a funcțiilor definite pe (-*l* , *l*). Exemplu.

Vom considera cazul general al dezvoltării în serie Fourier a unei funcții periodice cu perioada T = 2*l* (*l* >0) . Şirul trigonometric fundamental , va fi :

$$(1)\qquad 1, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, ..., \cos\frac{n\pi x}{l}, \sin\frac{n\pi x}{l}, ...$$

Fie f(x) restricția funcției periodice *f* cu perioada T = 2*l* pe intervalul (-*l*, *l*). Efectuând schimbarea de variabilă $x = \frac{lt}{\pi}$, funcția $f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$ va fi o funcție periodică cu perioada 2π. Restricția ei la intervalul $(-\pi, \pi)$ va fi funcția $f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$. Scriind dezvoltarea în serie a funcției $f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$, avem :

(2) $$f\left(\frac{lt}{\pi}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt) \quad ,$$

valabilă în orice punct de continuitate $t \in R$. Datorită substituției $x = lt/\pi$, coeficienții Fourier vor avea expresiile:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} f(x)\frac{\pi}{l}dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx$$

(3) $$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx$$

Deci seria Fourier pentru funcția f(x) pe intervalul $(-l, l)$ va fi :

(4) $$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l})$$

unde coeficienții sunt dați de formula (3).

Exemplu. Să scriem seria Fourier corespunzătoare funcției f(x) = x pe intervalul (-*l* , *l*). Funcția f este impară pe (-*l* , *l*) deci seria Fourier va conține numai termeni în sinus. Avem :

$$a_k = 0, b_k = \int_{-1}^{1} x \sin k\pi x dx = 2\int_{0}^{1} x \sin k\pi x dx = (-1)^{k+1}\frac{2}{k\pi} \quad .$$

Prin urmare, seria Fourier corespunzătoare funcției f(x) va fi :

$$x = \frac{2}{\pi}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin k\pi x\right) \quad .$$

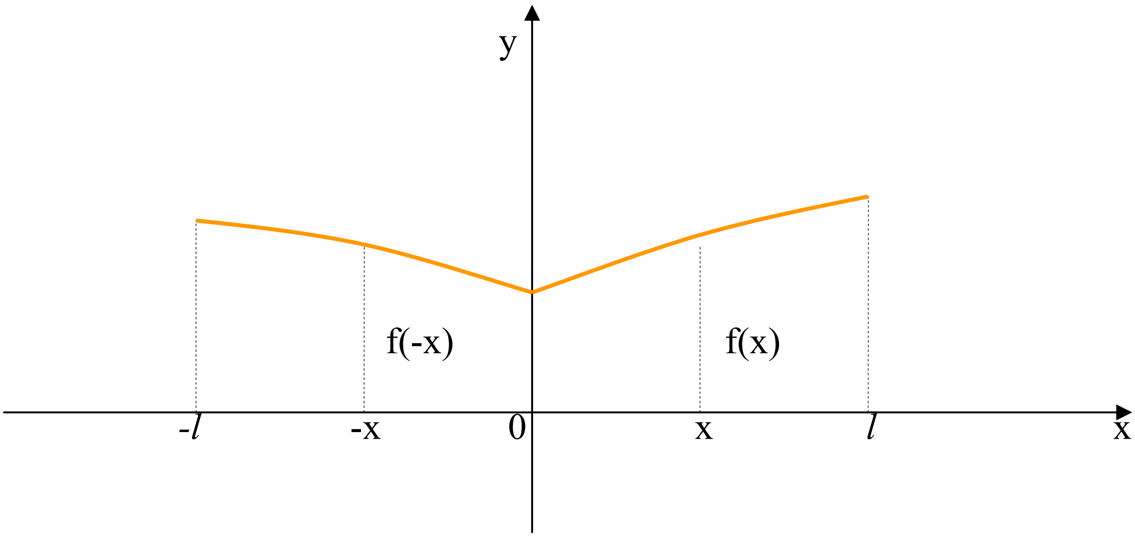
Pentru $x = \frac{1}{2}$, obținem suma :

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}.$$

4. <u>Dezvoltarea în serie Fourier după cosinusuri sau sinusuri a unei funcți definite pe intervalul (0 , *l*). Exemplu.</u>

Fie f(x) o funcție definită pe $[0, l]$. Deseori este util ca funcția f(x) să se dezvolte în serie Fourier după cosinusuri sau sinusuri . În acest scop funcția se

prelungeşte pe intervalul $[-l,0]$ astfel îcât noua funcţie F(x) să fie funcţie pară sau impară pe intervalul $[-l,l]$, după cum dezvoltarea în serie Fourier trebuie să fie după cosinusuri sau sinusuri. Să presupunem că dorim să dezvoltăm funcţia f(x), în serie Fourier după cosinusuri (figura):



Efectuăm prelungirea pară pe intervalul $[-l,0]$, deci luăm simetricul graficului funcţiei f în raport cu axa ordonatelor. Obţinem astfel o nouă funcţie F(x) pară pe $[-l,l]$.

$$F(x)=\begin{cases} f(-x), x\in[-l,0] \\ f(x), x\in[0,l] \end{cases} .$$

Dacă funcţia dată f(x) îndeplineşte condiţiile lui Dirichlet pe intervalul [0, *l*], atunci noua funcţie F(x) va îndeplini aceste condiţii pe intervalul [-*l* , *l*]. Prin urmare, seria Fourier corespunzătoare funcţiei F(x) va fi :

(1) $$F(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{k\pi x}{l}$$

unde

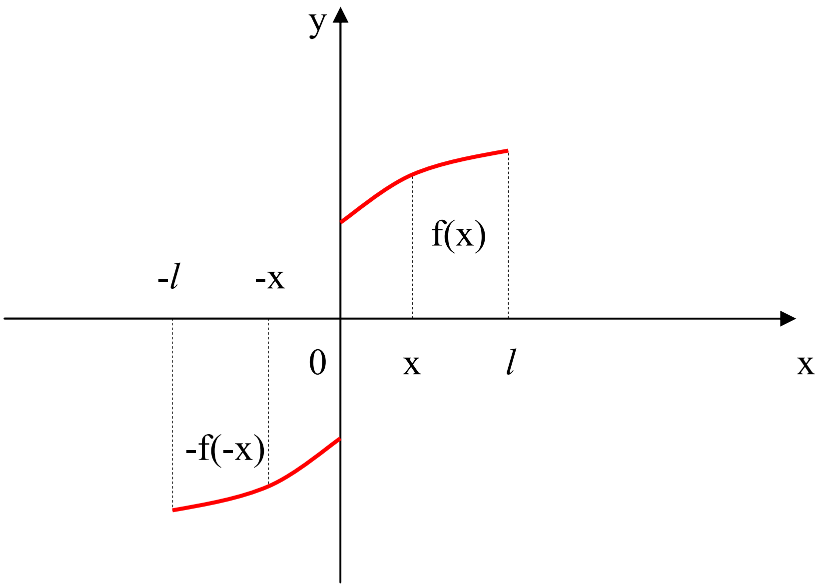
(2) $$\begin{cases} a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}F(x)dx=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)dx \\ a_k=\frac{1}{l}\int_{l}^{l}F(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx \end{cases} , \quad b_k=0 .$$

Dezvoltarea (1) are loc în toate punctele de continuitate de pe intervalul (-*l*, *l*). În particular, pe intervalul (0, *l*) obţinem dezvoltarea căutată după cosinusuri :

(3) $$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l} ,$$

valabilă în punctele de continuitate din intervalul (0, *l*).

Analog pentru a obține dezvoltarea în serie Fourier după sinusuri a funcției f(x) definită pe [0, *l*), efectuăm o prelungire impară a funcției f pe intervalul [-*l* , 0) (figura) :



şi obţinem astfel o nouă funcție :

$$F(x) = \begin{cases} -f(-x), x \in [-l,0] \\ f(x), x \in [0,l] \end{cases} .$$

Această funcție este impară pe intervalul [-*l*, *l*] ,graficul ei fiind simetric în raport cu originea sistemului de referință. Scriind dezvoltarea în serie Fourier pentru funcția impară, vom obține :

(4) $$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{l}$$

unde:

(5) $$\begin{cases} a_k = 0, b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx, sau \\ b_k = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx \end{cases} .$$

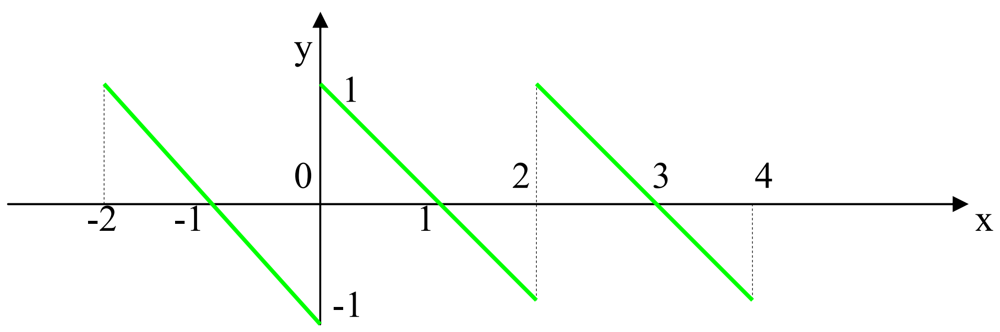
În particular, în orice punct de continuitate din intervalul (0, *l*) avem dezvoltarea după sinusuri a funcției date f(x) , anume:

$$(6) \qquad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{l} \quad .$$

Exemplu. Să dezvoltăm în serie Fourier după sinusuri funcția f(x)=1-x , $x \in [0,\ 1)$. Efectuând o prelungire impară pe intervalul (-1, 0) (l=1) a funcției date, vom obține funcția:

$$F(x) = \begin{cases} -1-x, x \in [-1,0) \\ 1-x, x \in [0,1] \end{cases}$$

Prin periodicizarea funcției F(x) se obține graficul :



În consecință , seria Fourier a funcției considerate va fi 1-x $= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\pi x$

unde :

$$b_k = 2\int_0^1 (1-x)\sin k\pi x = \frac{2}{k\pi} \quad .$$

Deci:

$$1\text{-x} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\pi x}{k}. \ .$$

5. Forma complexă a seriilor Fourier.

O formă unitară a seriilor Fourier este forma complexă. Fie f(x) o funcție care pe intervalul (-*l*, *l*) satisface condițiile teoremei lui Dirichlet. Atunci putem scrie dezvoltarea în serie Fourier :

(1) $$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l} \right)$$,

unde coeficienții seriei au expresiile:

(2) $$\begin{cases} a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx \\ b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx \end{cases}$$.

Utilizând formulele lui Euler:

(3) $$\cos\frac{k\pi x}{l}=\frac{1}{2}(e^{i\frac{k\pi x}{l}}+e^{-i\frac{k\pi x}{l}}), \sin\frac{k\pi x}{l}=\frac{1}{2i}(e^{i\frac{k\pi x}{l}}-e^{-i\frac{k\pi x}{l}})$$,

seria (1) devine:

(4) $$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k-ib_k}{2}e^{i\frac{k\pi x}{l}}+\frac{a_k-ib_k}{2}e^{-i\frac{k\pi x}{l}}\right).$$

Ținând seama de expresiile (2) ale coeficienților avem :

(5) $$c_k=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i\frac{k\pi x}{l}}dx$$

şi

(6) $$c_{-k}=\frac{a_k-ib_k}{2}=.\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{i\frac{k\pi x}{l}}dx$$

Remarcăm că în (5) şi (6), $k\in N^*$. Primul termen al dezvoltării (1) are expresia :

(7) $$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)dx=c_0$$ care se obține din (5) pentru k=0.

Prin urmare, seria (4) se poate scrie sub forma :

(8) $$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k e^{i\frac{k\pi x}{l}}+\sum_{k=0}^{\infty}c_{-k}e^{-i\frac{k\pi x}{l}}$$

sau

(9) $$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{i\frac{k\pi x}{l}}$$

unde

(10) $$c_k=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i\frac{k\pi x}{l}}dx,\ k\in Z$$

Expresia (9) de reprezentare a funcției f(x) se numeşte *forma complexă a seriei Fourier*.

6. Dezvoltarea unei funcții în serie de funcții ortogonale. Aproximarea funcțiilor în medie pătratică. Relația de închidere a lui Parseval.

Analizînd modul de determinare a coeficienților seriei Fourier, observăm că raționamentele folosite nu s-au bazat pe proprietățile concrete ale funcțiilor

trigonometrice din sistemul trigonometric fundamental ci numai pe proprietatea de ortogonalitate. Din acest motiv este natural ca în locul sistemului trigonometric de funcții ortogonale să luăm un sistem oarecare de funcții ortogonale. În acest fel o funcție poate fi reprezentată în serie cu un sistem de funcții ortogonale, obținând o serie Fourier generalizată.

Fie șirul de funcții ortogonale $(\varphi_n(x)) \in L^2(a,b)$ (de pătrat integrabil pe (a,b) $\subset$**R**). Pentru simplificarea calculelor vom presupune că șirul a fost normalizat și vom nota cu $(\Psi_n(x))$ șirul ortonormat din L^2(a,b). Să presupunem că f$\in L^2$(a,b) și că ea se poate reprezenta sub forma unei serii uniform convergente pe (a,b) în raport cu sistemul de funcții ortonormate $(\Psi_n(x))$. Conform ipotezelor făcute avem :

(1) $$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k \Psi_k(x) \ .$$

Pentru determinarea coeficienților c_k (k$\in$N), înmulțim egalitatea (1) cu conjugatul $\overline{\Psi_k}$ al funcției Ψ_k și integrând termen cu termen pe intervalul (a,b), obținem :

(2) $$\int_a^b f(x)\overline{\Psi_k}dx = c_k \int_a^b \Psi_k \overline{\Psi_k} dx = c_k \|\Psi_k\|^2 = c_k$$

și deoarece sistemul (Ψ_k) este ortonormat, avem :

(3) $$(\Psi_m, \Psi_m) = \begin{cases} 0, m \neq n \\ 1, m = n \end{cases} .$$

Coeficienții c_k determinați prin relația (2) se numesc *coeficienții Fourier generalizați* ai funcției f$\in L^2$(a,b) relativ la sistemul ortonormat de funcții (Ψ_k) pe (a, b). Seria (1) se va numi *seria Fourier generalizată* a funcției relativ la sistemul ortonormat (Ψ_k).

Teorema lui Dirichlet rămâne valabilă și pentru seriile Fourier generalizate. Astfel relația (1) are loc în fiecare punct de continuitate a funcției f din intervalul (a, b) dacă partea reală și partea imaginară ale funcției complexe f$\in L^2$(a,b) satisfac condițiile teoremei lui Dirichlet.

Exemplu. Să dezvoltăm în serie după polinoamele lui Hermite funcția f(x)=e^x , x$\in$**R**. Polinoamele lui Hermite definite prin relația:

(4) $H_n(x)= (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) \qquad n \in N, x \in R$ formează un sistem ortogonal cu ponderea p(x)= e^{-x^2} pe **R**.

Funcția f(x) $e^{-x^2} \in L^2(R)$ și satisface condițiile teoremei lui Dirichlet , deci :

(5) $$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k H_k(x), \ x \in \mathbf{R} \ .$$

Înmulțind această egalitate cu $e^{x^2}H(x)$ şi integrând, pe baza proprietății de ortogonalitate obținem :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+x} H_k(x)dx = c_k \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_k^2(x)dx = c_k 2^k k!\sqrt{\pi} \qquad \text{de unde:}$$

$$c_k = \frac{1}{2^k k!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+x} H_k(x)dx .$$

Integrînd prin părți şi ținând seama de (4) obținem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+x} H_k(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+x} H_{k-1}(x)dx = ... = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+x} dx = \sqrt{\pi} e^{\frac{1}{4}} .$$

Prin urmare, seria Fourier generalizată corespunzătoare funcției f(x)=e^x^ este :

$$e^x = e^{\frac{1}{4}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_k(x)}{2^k k!} ,$$

valabilă pentru orice $x \in R$.

Definiție. Fie f,g$\in L^2(a,b)$. Numim *eroare pătratică medie* a funcției f față de g numărul

$$(6) \qquad \delta = \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{b-a}} \| f(x) - g(x) \| .$$

Numărul δ reprezintă o măsură a erorii ce o facem dacă aproximăm funcția f prin g sau funcția g prin f. Această măsură a erorii numită *eroare pătratică medie* este deosebit de utilă în studiul seriilor Fourier, deoarece este legată direct de norma funcțiilor de pătrat integrabil.

Fie funcția f$\in L^2(a,b)$ şi sistemul ortonormat de funcții complexe $((\Psi_k(x))$ de pătrat integrabil pe intervalul (a,b) .

Funcția:

$$(7) \qquad S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \Psi_k(x)$$

se numeşte polinom ortogonal pe intervalul (a, b). Să determinăm coeficienții λ_k ai polinomului (7) astfel încât eroarea pătratică medie față de funcția f să fie minimă. Avem :

$$\delta_n^2 (b-a) = \int_a^b |f(x) - S_n(x)|^2 dx = \int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \Psi_k \right|^2 dx .$$

Ținând seama că funcțiile f , Ψ_k sunt funcții complexe, iar λ_k numere complexe, pentru dezvoltarea expresiei de sub semnul integrală de mai sus vom folosi formula :

$$|\alpha - \beta|^2 = (\alpha - \beta) \cdot (\overline{\alpha} - \overline{\beta}) = |\alpha|^2 + |\beta|^2 - \alpha\overline{\beta} - \overline{\alpha}\beta .$$

Obținem :

(8) $\left\{\delta_n^2(b-a)=\int_a^b |f|^2 dx-\sum_{k=1}^n \overline{\lambda_k}\int_a^b f\overline{\Psi_x}dx-\sum_{k=1}^n \lambda_k\int_a^b \overline{f}\Psi_k dx+\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \lambda_i\overline{\lambda_j}\int_a^b \Psi_i\overline{\Psi_j}dx\right.$.

Sistemul de funcţii Ψ_k (fiind ortonormat şi ţinând seama că coeficienţii Fourier corespunzători funcţiei f relativ la sistemul ortonormat (Ψ_k) sunt $c_k=\int_a^b f(x)\overline{\Psi_k}dx$ egalitatea (8) devine:

(9) $$\begin{cases}\delta_n^2(b-a)=\|f\|^2-\sum_{k=1}^n\overline{\lambda_k}c_k-\sum_{k=1}^n\lambda_k\overline{c_k}+\sum_{k=1}^n\lambda_k\overline{\lambda_k}=\|f\|^2-\sum_{k=1}^n|c_k|^2+\\ +\sum_{k=1}^n(c_k-\lambda_k)(\overline{c_k}-\overline{\lambda_k})=\|f\|^2-\sum_{k=1}^n|c_k|^2+\sum_{k=1}^n|c_k-\lambda_k|^2\end{cases}.$$

Din relaţia (9) rezultă că δ_n va fi minimă dacă $c_k=\lambda_k$. Am obţinut astfel :

Teorema 1. Dintre toate polinoamele ortogonale, cel pentru care eroarea pătratică medie faţă de funcţia f$\in L^2(a,b)$ este minimă este acela ai cărui coeficienţi sunt coeficienţii Fourier generalizaţi relativ la funcţia f.

Aceasta înseamnă că funcţia $\sum_{k=1}^n c_k\Psi_k$ realizează cea mai bună aproximaţie în medie pătratică a funcţiei de pătrat integrabil f. Putem scrie:

(10) $$\delta_n^2(b-a)=\|f\|^2-\sum_{k=1}^n|c_k|^2 .$$

Deoarece $\delta_n\geq 0$, rezultă inegalitatea:

(11) $$\sum_{k=1}^n|c_k|^2\leq\|f\|^2$$

(unde$\|f\|^2=\int_a^b|f|^2dx$), numită *inegalitatea lui Bessel.* Putem astfel enunţa :

Teorema 2. Suma pătratelor modulelor a n coeficienţi Fourier ai unei funcţii de pătrat integrabil, relativ la un sistem de n funcţii ortonormate, este cel mult egală cu pătratul normei funcţiei f .

Dacă considerăm seria cu termeni pozitivi $\sum_{n=1}^\infty|c_n|^2$ atunci din inegalitatea lui Bessel deducem că sumele parţiale ale seriei sunt mărginite de$\|f\|^2$; prin urmare seria$\sum_{n=1}^\infty|c_n|^2$ este o serie convergentă . Din acest motiv în inegalitatea lui Bessel putem considera n$\to\infty$ şi se obţine :

(12) $$\sum_{n=1}^n|c_n|^2\leq\|f\|^2$$

numită *inegalitatea lui Parseval* .

<u>Definiție</u>. Un şir ortogonal de funcții (Ψ_k) de pătrat integrabil este un *sistem închis* , dacă pentru orice f$\in L^2(a,b)$ are loc relația :

$$(13) \qquad \sum_{n=1}^{n} |c_n|^2 = \|f\|^2$$

numită relația de *închidere a lui Parseval* .

Fie f$\in L^2(-l,l)$ $l>0$. Sistemul trigonometric normat :

$$(14) \qquad \frac{1}{\sqrt{2l}}, \frac{\cos\frac{\pi x}{1}}{\sqrt{l}}, \frac{\sin\frac{\pi x}{1}}{\sqrt{l}}, \ldots, \frac{\cos\frac{k\pi x}{1}}{\sqrt{l}}, \frac{\sin\frac{k\pi x}{1}}{\sqrt{l}}, \ldots$$

este un sistem închis . În raport cu sistemul ortogonal (14) coeficienții Fourier sunt :

$$c_k^{/|} = \int_l^{-l} f(x) \frac{\cos\frac{k\pi x}{1}}{\sqrt{l}} dx = \frac{\sqrt{l}}{l} \int_l^{-l} f(x) \cos\frac{k\pi x}{l} dx = \sqrt{l} \cdot a_k ,$$

$$c_k^{//} = b_k \sqrt{l} \text{ si } c_0 = \int_l^{-l} \frac{f(x)}{\sqrt{2l}} dx = \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{2}} \frac{1}{l} \int_l^{-l} f(x) = \frac{\sqrt{l}}{2} \cdot a_0$$

Înlocuind $c_{0,} c_k^/, c_k^{//}$ obținuți mai sus în (13) , obținem relația de închidere a lui Parseval .

$$(15) \qquad \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f^2(x) dx \; .$$

Dacă $l=\pi$, (15) devine :

$$(16) \qquad \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \; .$$

Exemplu. Să se scrie seria Fourier trigonometrică şi apoi egalitatea lui Parseval pentru funcția**:**

$$f(x) = \begin{cases} 1 \; , & \text{pentru } |x| < 1 \\ 0 \; , & \text{pentru } 1 \le |x| < \pi \end{cases} .$$

Să se deducă apoi sumele seriilor**:** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2}$**.**

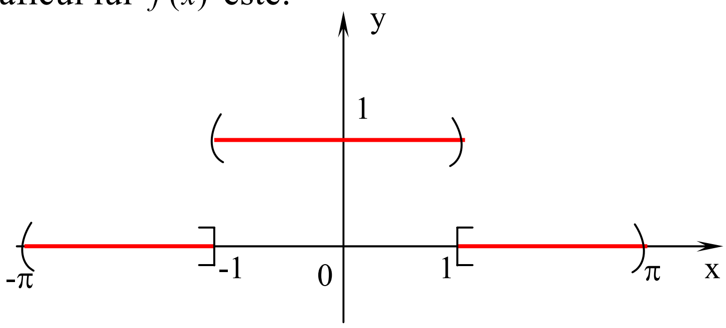
Seria Fourier este:

$$(1) \qquad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

unde

$$(2) \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \; a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \text{ şi } b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \; .$$

Graficul lui $f(x)$ este:



Avem $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} dx$, de unde rezultă:

(3) $$a_0 = \frac{2}{\pi} \ .$$

Apoi, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \cos nx dx = \frac{1}{\pi n}\sin nx\Big|_{-1}^{1} = \frac{2\sin n}{\pi n}$,adică:

(4) $$a_n = \frac{2\sin n}{\pi n}$$

şi: $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \sin nx dx = -\frac{1}{\pi n}\cos nx\Big|_{-1}^{1} = 0$ adică:

(5) $$b_n = 0 \qquad (f(x) \text{ pară!}) \ .$$

Deci seria Fourier ataşată funcţiei *f(z)* este:

(6) $$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}\cos nx \ .$$

Egalitatea lui Parseval este:

(7) $$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

sau

(8) $$\frac{2}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} dx$$

de unde:

(9) $$\frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2} = 1 \ .$$

Rezultă suma cerută:

(10) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}=\frac{\pi-1}{2} \quad .$$

Pentru calcul $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n^2}$ scriem:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\sin^2 n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}.$$

Ştim că: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$;deci $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi-1}{2}$.

7. **Probleme propuse**

1) Să se dezvolte în serie Fourier funcția :

a) $f(x)=\begin{cases}1, & x\in(-\pi,0]\\ 3, & x\in(0,\pi]\end{cases}$;

b) $f(x)=\begin{cases}x, & x\in[0,1]\\ 1, & x\in(1,2)\\ 3-x & ,x\in[2,3]\end{cases}$;

c) $f(x)=\dfrac{\cos x}{5+4\cos x}$ $\quad ,x\in R$.

2) Să se dezvolte în serie Fourier de sin şi respectiv cos funcția :

a) $f(x)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}$ $\quad ,x\in(0,\pi)$;

b) $f(x)=\begin{cases}x, & x\in[0,1]\\ -x, & x\in(1,2]\end{cases}$.

3) Să se determine seria Fourier trigonometrică a funcției periodice

$f(x) = \frac{\pi}{2sh\pi} e^x, \quad x \in (-\pi, \pi)$ de perioadă 2π . Din dezvoltarea obținută şi din

relația de închidere a lui Parseval să se calculeze sumele :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} \quad \text{şi} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \ .$$

4) Să se scrie seria Fourier trigonometrică şi apoi egalitatea lui Parseval pentru

funcția :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 0, & a \le |x| \le \pi \end{cases}, \ a > 0 \ .$$

Să se calculeze apoi sumele seriilor :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 na}{n^2} \quad \text{şi} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 na}{n^2} \ .$$

CAPITOLUL V

TRANSFORMARI INTEGRALE

1. Integrala Fourier. Forma complexă şi forma reală a integralei Fourier. Cazul funcţiilor pare sau impare.

Să considerăm o funcţie f(t) reală sau complexă, definită pe **R** şi neperiodică. Funcţia f(t) nu mai poate fi dezvoltată în serie Fourier. În schimb, în anumite condiţii, f(t) poate fi reprezentată printr-o integrală dublă improprie care prezintă o oarecare analogie cu seria Fourier.

Are loc:

***Teorema* 1.** Fie f(t) o funcţie reală sau complexă cu următoarele proprietăţi :

1. Satisface condiţiile lui Dirichlet în orice interval de lungime finită.
2. În fiecare punct c de discontinuitate, valoarea funcţiei este egală cu media aritmetică a limitelor laterale în acel punct, $f(c)=\frac{1}{2}[f(c-0)+f(c+0)]$.

.

3. Este absolut integrabilă pe $(-\infty,\infty)$. Cu alte cuvinte, integrala $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt$ este convergentă. În aceste condiţii există egalitatea:

$$(1)\qquad f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{iu(t-\tau)}d\tau.$$

Integrala dublă improprie prin care este reprezentată funcţia f(t) se numeşte *integrala Fourier*, iar egalitatea (1) se numeşte *formula integrală a lui Fourier*, forma exponenţială (în (1) se poate lua şi $e^{-in(t-\tau)}$.) sau forma complexă.

Fie F(t) o funcţie periodică de perioadă 2l, definită prin egalitatea:

(2) F(t) = f(t) , $t\in[-l,l]$.

Această funcţie îndeplineşte condiţiile lui Dirichlet, deci poate fi dezvoltată în serie Fourier:

$$F(t)=\frac{1}{2l}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-l}^{l}F(t)e^{in\omega(t-\tau)},\omega=\frac{\pi}{l}$$ sau ţinînd seama de (2),

$$(3)\qquad F(t)=\frac{1}{2l}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-l}^{l}f(\tau)e^{in(t-\tau)}d\tau\quad .$$

Din (3) vom obţine o reprezentare a funcţiei f(t) trecînd la limită pentru $l\to\infty$.

Să considerăm o nouă variabilă reală u şi să notăm $n\omega = u_n$. Pentru un l dat , putem nota: $\varphi(u_n,t) = \int_{-l}^{l} f(\tau)e^{in(t-\tau)}d\tau$.

Observăm că $\omega = \frac{\pi}{l}, \omega = u_n - u_{n-1}$ şi (3) devine:

$$F(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\varphi(u_n,t)(u_n - u_{n-1}) .$$

Această serie este asemănătoare cu sumele ce definesc integrala Riemann. Trecînd la limită pentru $l \to \infty$ ultima egalitate devine:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(u,t)du ,$$

unde

$$\varphi(u,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{in(t-\tau)}d\tau ,$$

adică tocmai formula (1).

Forma reală (trigonometrică)a integralei Fourier. Cazul funcțiilor pare sau impare.

Dacă în (1) se face înlocuirea :

$e^{in(t-\tau)} = \cos u(t-\tau) + i\sin u(t-\tau)$, această egalitate se mai scrie:

$$(4) \qquad \begin{cases} f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos u(t-\tau)d\tau + \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\sin u(t-\tau)d\tau . \end{cases}$$

Observăm că funcțiile :

$g(u,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos u(t-\tau)d\tau, h(u,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\sin u(t-\tau)d\tau$, au proprietățile:

$g(-u,t) = g(u,t), h(-u,t) = -h(u,t)$, deci:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(u,t)du = 2\int_{0}^{+\infty} g(u,t)du, \int_{-\infty}^{+\infty} h(u,t)du = 0$$

şi (4) se va reduce la:

$$(5) \qquad f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos u(t-\tau)d\tau .$$

Egalitatea (5) se numeşte *forma reală sau trigonometrică a formulei lui Fourier*. Denumirile : "forma reală" respectiv "forma complexă" a integralei Fourier, sunt justificate numai în cazul când f(t) este o funcție reală ; totuşi acestea se folosesc şi în cazul când f(t) este o funcție complexă.

*Observație***.** Să considerăm forma reală (5) a integralei Fourier şi să facem înlocuirea :

$$\cos u(t-\tau) = \cos ut \cos u\tau + \sin ut \sin u\tau .$$

Egalitatea (5) se mai poate scrie:

$$(5') \qquad \left\{ f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \cos ut \cdot du \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos u\tau \cdot d\tau + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \sin ut du \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\sin u\tau d\tau .. \right.$$

Dacă notăm:

$$A(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos u\tau \cdot d\tau, B(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\sin u\tau \cdot d\tau ,$$

avem:

$$f(t) = \int_0^{\infty} [A(u)\cos ut + B(u)\sin ut] du..$$

Analogia cu seria Fourier este evidentă. Are loc:

<u>Teorema 2.</u> Dacă f(t) este o funcție pară , formula lui Fourier se reduce la :

$$(6) \qquad f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \cos ut \cdot du \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos u\tau \cdot d\tau. \; .$$

Dacă f(t) este impară atunci:

$$(7) \qquad f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \sin ut \cdot du \int_0^{+\infty} f(\tau)\sin u\tau \cdot d\tau .$$

Într-adevăr, dacă f(t) este o funcție pară, atunci $f(\tau)\cos u\tau \cdot d\tau$ .este pară în raport cu τ iar $f(\tau)\sin u\tau$ este impară şi avem :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos u\tau \cdot d\tau = 2\int_0^{+\infty} f(\tau)\cos u\tau \cdot d\tau .$$

şi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\sin u\tau \cdot d\tau = 0 .$$

Egalitatea (5') se reduce la (6). Analog se justifică (7).

<u>2. Transformata Fourier.</u>

Integrala Fourier are aplicații foarte variate. Unele din acestea sunt legate direct de noțiunea de transformată Fourier.

Fie f(t) o funcție care poate fi reprezentată prin integrala Fourier (1).

Egalitatea (1) se mai poate scrie:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iut} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-iu\tau} d\tau .$$

Dacă notăm ,

$$g(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-iu\tau}d\tau=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iut}dt$$

avem:

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)e^{iut}du\ .$$

<u>Definiția 1.</u> Funcțiile:

$$(8)\qquad \begin{cases} g(u)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iut}dt \\ f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)e^{-iut}dt \end{cases}.$$

se numesc una transformata Fourier a celeilalte.

Din (8) observăm că putem scrie şi :

$$(8')\qquad \begin{cases} g(u)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iut}dt \\ f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)e^{-iut}dt \end{cases}$$

care arată că f şi g au roluri simetrice.

Analog dacă în (6) se notează :

$$g(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(\tau)\cos u\tau d\tau=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos ut\cdot dt\ .$$

această egalitate devine:

$$f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} g(u)\cos ut\cdot du\ .$$

iar dacă în (7) se notează :

$$g(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(\tau)\cos u\tau d\tau=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(t)\sin ut\cdot dt$$

egalitatea (7) se scrie:

$$f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} g(u)\sin ut\cdot du\ .$$

Definiția 2. Funcțiile:

$$(9)\qquad \begin{cases} g(u) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\cos ut \cdot dt \\ f(t) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \displaystyle\int_0^{+\infty} g(u)\cos ut \cdot du \end{cases}$$

se numesc una transformata Fourier prin cosinus a celeilalte.

Exemplu. Să se afle transformata Fourier prin cosinus a funcției: $f(t) = \dfrac{1}{(1+t^2)^2}$. Din rezultatul obținut să se găsească: $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{t\sin ut}{(1+t^2)^2} dt.$

Transformata Fourier prin cosinus a funcției *f(t)* este:

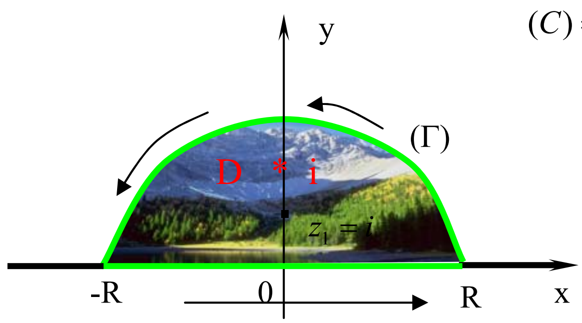
$$(1)\qquad g(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t)\cos ut dt$$

sau $g(u) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos ut}{(1+t^2)^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ut}{(1+t^2)^2} dt.$

Pentru calculul integralei: $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ut}{(1+t^2)^2} dt$ să considerăm funcția $h(z) = \dfrac{\cos uz}{(z^2+1)^2}$

şi conturul de mai jos:

$(C) = [-R, R] \cup (\Gamma)$



Observăm că:

$$(2)\qquad \int_C h(z)dz = \int_{-R}^{R} h(t)dt + \int_{\Gamma} h(z)dz,$$

Trecând la $\lim\limits_{R\to\infty}$ în relația (2) obținem:

$$(2')\qquad \int_C h(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ut}{(1+t^2)^2} dt + \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma} h(z)dz.$$

Pe baza teoremei reziduurilor, $\int_C h(z)dz = 2\pi i rezh(i)$ $(z_1 = i \in D$ pol dublu; $z_2 = -i \notin D)$ şi $\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma h(z)dz = 0$, (din lema lui Jordan: $\lim_{\substack{R\to\infty\\|z|\to\infty}}|zh(z)| = 0 \Rightarrow \int_\Gamma h(z)dz \to 0$ (când $R\to\infty$)).

Din $(2')$ obținem:

(3) $$I = 2\pi i rezh(i)$$.

Observăm că:

$$rezh(i) = \lim_{|z|\to i}\left[(z-i)^2\frac{\cos uz}{(z-i)^2(z+i)^2}\right]' = \lim_{z\to i}\frac{-u\sin uz(z+i)^2 - 2(z+i)\cos uz}{(z+i)^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow rezh(i) = \frac{ui\sin ui + \cos ui}{4i}$$

sau $\left(\sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}, \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}\right)$:

(4) $$rezh(i) = \frac{-ushu + chu}{4i}$$.

Din (3) şi (4) obținem:

(5) $$I = \frac{\pi}{2}(chu - ushu)$$

de unde:

(6) $$g(u) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(chu - ushu)$$.

Pentru calculul integralei: $\int_0^\infty \frac{t\sin ut}{(1+t^2)^2}dt$, derivăm relația:

$g(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\cos ut}{(1+t^2)^2}dt$, în raport cu variabila “u”şi obținem:

$$g'(u) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{t\sin ut}{(1+t^2)^2}dt$$

sau folosind (6): $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(shu - shu - uchu) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{t\sin ut}{(1+t^2)^2}dt$, de unde:

(7) $$\int_0^{\infty}\frac{t\sin ut}{(1+t^2)^2}dt = \frac{\pi}{4}uchu \ .$$

<u>Definiția 3.</u> Funcțiile:

(10) $$\begin{cases} g(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(t)\sin ut\cdot dt \\ f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} g(u)\sin ut\cdot du \end{cases}$$

se numesc una transformata Fourier prin sinus a celeilalte.

Să considerăm egalitatea a doua din (8):

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)e^{iut}du\ .$$

Această egalitate este o ecuație în care funcția necunoscută g(u) figurează sub semnul de integrare. Soluția acestei ecuații este dată de prima egalitate din (8).

În general, dacă într-o ecuație funcția necunoscută figurează sub semnul de integrare, se spune că acea egalitate este o *ecuație integrală.* În cazul de față avem o ecuație integrală de o formă specială, care uneori se numeşte *ecuație integrală de tip Fourier.*

Tot ecuații integrale de tip Fourier sunt considerate şi ecuațiile:

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\cos ut\cdot du \qquad \text{şi} \qquad f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\sin ut\cdot du$$

cu f(t) definită pentru t >0 şi îndeplinind condițiile *teoremei 1.*

Exemplu. Să se rezolve ecuația integrală de tip Fourier:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\cos ut\cdot du = \varphi(t), \quad \text{unde :}$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1-t \\ 0 \end{cases} \text{pentru} \begin{cases} 0 < t \le 1 \\ t > 1 \end{cases}.$$

Ecuația dată se mai poate scrie:

$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} g(u)\cos ut\cdot du = f(t)$, unde:

$$f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\varphi(t)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(1-t) & \text{pentru } 0<t\le 1\\ 0 & t>1\end{cases}.$$

Soluția ecuației este:

$$g(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^1 f(t)\cos ut\cdot dt+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_1^{+\infty} f(t)\cos ut\cdot dt.$$

Deoarece f(t) =0 pentru t >1, a doua integrală este nulă. Ramâne:

$$g(u)=\frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-t)\cos ut\cdot dt=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-\cos u}{u^2}.$$

3. Transformata Laplace.

Original.Transformata Laplace.Proprietăți.

Calculul operațional se bazează pe realizarea unei corespondențe între două mulțimi de funcții: mulțimea funcțiilor numite original şi imaginile lor obținute printr-o anume transformare. Interesul pe care îl prezintă această corespondență se datorează faptului că operațiilor de derivare şi de integrare aplicate funcțiilor original le corespund anumite operații algebrice care se aplică imaginile lor.

Definiție. Se numeşte *original* o funcție f(t), reală sau complexă, definită pe mulțimea numerelor reale şi care satisface următoarele condiții:

1. f(t) = 0 pentru t < 0 ;
2. f(t) este derivabilă pe porțiuni;
3. există două numere M >0 şi $s_0 \ge 0$ astfel încât:

(1) $\qquad |f(t)| \le M\cdot e^{s_0 t}.$

Numărul s_0 se numeşte indice de creştere.

S-ar părea că prima condiție este artificială. Dar metodele operaționale se referă la rezolvarea unor probleme în care mărimea fizică reprezentată prin f(t) are proprietatea că sau este nulă înainte de momentul inițial t = 0, sau valorile sale pentru t < 0 nu prezintă interes.

Se spune că funcția f(t), definită pe un interval I, mărginit sau nemărginit, este derivabilă pe porțiuni dacă pentru orice interval , există o diviziune d = (a, x_1, x_2, ... , x_{n-1}, b) astfel încât f(t) să fie derivabilă pe fiecare interval (x_{i-1}, x_i) şi să existe limitele laterale:

$$f(x_{i-1},+0), f(x_i,-0), f'(x_{i-1},+0), f'(x_i,-0), i \in \{1,2,...,n\}.$$

A treia condiție arată că valorile modulului funcției pot fi majorate prin valorile unei exponențiale. Cea mai simplă funcție original este funcția unitate:

$$(2) \qquad \eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

Fie f(t) o funcție original(notăm $f \in \mathcal{O}$).

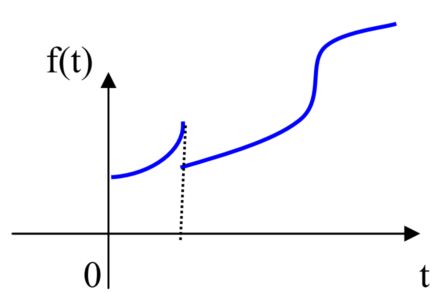
<u>Definiție.</u> Funcția

$$(3) \qquad F(p) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt} dt \quad , \quad p = s + i\sigma$$

se numeşte *imaginea după Laplace* a funcției f(t) sau *transformata Laplace* a funcției f(t).

Domeniul în care funcția F(p)(notată şi F(p)=L[f](p)) este definită , este precizat de următoarea:

<u>Teoremă</u>. Fie s_0 indicele de creştere al funcției f(t). Imaginea F(p) a funcției f(t) este determinată în semiplanul $s > s_0$ şi este o funcție olomorfă în acest semiplan ; în plus



$$(4) \qquad F'(p) = \int_0^\infty (-tf(t)) \cdot e^{-pt} dt \,.$$

Transformata Laplace este o transformare liniară adică:

(5) $$\begin{cases} L[f(t)+g(t)] = L\cdot[f(t)] + L[g(t)] \\ L[k\cdot f(t)] = k\cdot L\cdot[f(t)] \end{cases}$$, k o constantă.

Proprietăți ale transformatei Laplace.

1. Teorema asemănării. Fie f(t) o funcție original şi α o constantă $\alpha > 0$. Funcția $\varphi(t) = f(\alpha t)$ este, de asemenea o funcție original.

Dacă F(p) este imaginea funcției f(t), atunci $\forall \alpha > 0$, avem:

(6) $$L(f)(\alpha t) = \frac{1}{\alpha} F(\frac{p}{\alpha}).$$

Vom nota L[f] = Lf.

Din (6) obținem:

$$(L\varphi)(p) = \int_0^\infty f(\beta t)\cdot e^{-pt}dt = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty f(\tau)\cdot e^{-\frac{p}{\alpha}\tau}d\tau = \frac{1}{\alpha}F(\frac{p}{\alpha}).$$

Exemplu. Să presupunem cunoscută imaginea funcției : $\sin t : L\sin t = \frac{1}{p^2+1}$.

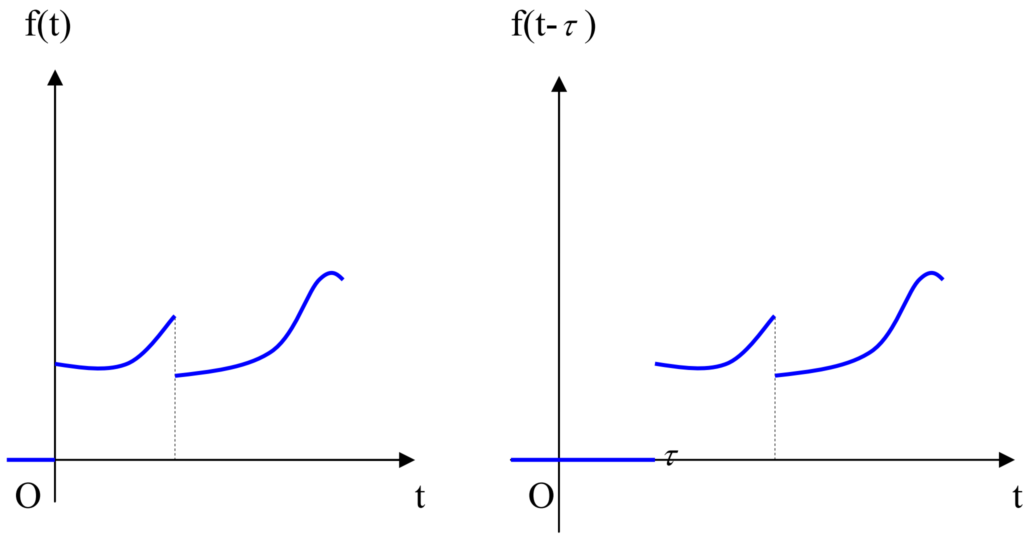
Atunci :

$$L\sin \omega t = \frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{(\frac{p}{\omega})^2+1} = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}, \omega > 0.$$

2. Teorema întârzierii. Dacă în funcția original f(t) înlocuim pe t cu $t-\tau$, unde τ este o constantă, obținem o nouă funcție original, f($t-\tau$), care este nulă pentru $t-\tau$<0 şi ia aceleaşi valori ca f(t), însă cu întârzierea τ (figura). Dacă τ>0 aceasta reprezintă efectiv o întârzie

Întârzierea τ se traduce prin înmulțirea imaginii cu $e^{-p\tau}$:

(7) $$Lf(t-\tau) = e^{-p\tau}Lf(t)$$



<u>Demonstrație</u>. Ținând seama că f($t-\tau$)=0 pentru $t<\tau$, avem:

$$\int_0^{\infty} f(t-\tau)\cdot e^{-pt}dt = \int_{\tau}^{\infty} f(t-\tau)\cdot e^{-pt}dt \,.$$

Cu schimbarea de variabilă $t-\tau=\theta$, ultima integrală devine:

$$\int_0^{\infty} f(t-\tau)\cdot e^{-pt}dt = \int_{\tau}^{\infty} f(\theta)\cdot e^{-p(t+\theta)}d\theta = e^{-p\tau}Lf(t)$$

şi egalitatea (7) este dovedită.

3. Teorema deplasării. Fie f(t) o funcție original avînd indicele de creştere s_0 şi F(p) imaginea sa. Înlocuirea lui p în F(p) cu p-q, unde q este o constantă, poate fi interpretată ca o deplasare care aduce originea în punctul q.

Deplasarea originii din planul variabilei p în punctul q se traduce prin înmulțirea originalului cu e^{qt}:

(8) $$Lf(p-q)(t) = L[e^{qt}f(t)] \,.$$

Într-adevăr,

$$Lf(p-q)(t)=\int_0^\infty f(t)e^{-(p-q)t}dt=\int_0^\infty [f(t)e^{qt}]e^{-pt}dt=L[f(t)e^{qt}].$$

Funcția F(p-q) este olomorfă în semiplanul s $> s_0$ +Re(q).

Exemplu. $L(e^{\lambda t}\cdot\sin\omega t)=\dfrac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$.

4. Derivarea originalului. Vom presupune că f(t) şi derivatele sale până la ordinul care apar sunt funcții original. Fie F(p) = Lf(t). Imaginea derivatei este:

(9) $\quad Lf'(t)=pF(p)-f(0)$

În general,

(10) $\quad Lf^{(n)}(t)=p^nF(p)-[p^{n-1}f(0)+p^{n-2}f'(0)+...+f^{(n-1)}(0)]$ unde ,

$$f(0)=\lim_{\substack{t\to\infty\\ t>0}}f(t),\ f^{(k)}(0)=\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}f^{(k)}(t),\quad k\in\{1,2,3,\ \dots\ ,n-1\}.$$

În unele probleme, f(0)=f'(0)=...=$f^{(n-1)}$(0)=0. În acest caz, egalitățile(9) şi (10) devin:

(11) $\quad Lf'(t)=pF(p), Lf^{(n)}(t)=p^nF(p)$

şi derivarea originalului se traduce prin înmulțirea imaginii sale cu p.

Să demonstrăm mai întâi egalitatea (9). Avem:

$$Lf'(t)=\int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt$$

Integrând prin părți, obținem:

$$Lf'(t)=[f(t)e^{-pt}]_0^\infty+p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt.$$

Primul termen din membrul drept se reduce la -f(0) deoarece:

$$\left|f(t)e^{-pt}\right|=\left|f(t)\right|e^{-pt}\le Me^{-(s-s_0)t}, s>s_0 \quad \text{şi deci} \quad \lim_{t\to\infty}\left|f(t)e^{-pt}\right|=0.$$

Ramâne: $Lf'(t)=-f(0)+p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$ şi egalitatea (9) este demonstrată.

Pentru a obține egalitatea (10), vom înlocui în (9) pe f'(t), succesiv, cu f''(t), ..., $f^{(n)}$(t). Avem:

$$Lf'(t)=pF(p)-f(0)=pLf(t)-f(0)$$
$$Lf''(t)=pLf'(t)-f'(0)$$
$$Lf'''(t)=pLf''(t)-f''(0)$$
$$...$$
$$Lf^{(n)}(t)=pLf^{(n-1)}(t)-f^{(n-1)}(0)$$

Înmulțim prima egalitate cu p^{n-1}, a doua cu p^{n-2}, a treia cu p^{n-3} , etc, ultima rămânând neschimbată, adunând apoi obținem egalitatea (10).

Exemplu. Cunoscînd imaginea funcției $\cos\omega t$,

$$L\cos\omega t = \frac{p}{p^2+\omega^2}$$

să deducem imaginea funcției folosind teorema de derivare a originalului.

$$L(-\omega\sin\omega t) = p\cdot\frac{p}{p^2+\omega^2} - 1 = -\frac{\omega^2}{p^2+\omega^2}.$$

Datorită proprietății de liniaritate, $-\omega$ poate fi scos în stânga operatorului L şi simplificînd cu $-\omega$, obținem:

$$L\sin\omega t = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

5.Derivarea imaginii. Egalitatea (4) se mai poate scrie:

(4') $$F'(p) = L[-tf(t)] \ .$$

Funcția F(p) fiind olomorfă în semiplanul $s > s_0$, din aproape în aproape se obține:

(12) $$F^{(n)}(p) = L[(-t)^n f(t)] \ .$$

Realția (12) exprimă faptul că derivarea imaginii se traduce prin înmulțirea originalului cu -t.

6. Integrarea originalului.Prin integrarea funcției original f(t) se înțelege operația:

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \ .$$

Se obține o nouă funcție original pe care o notăm cu g(t):

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$$

Integrarea originalului se traduce prin împărțirea imaginii sale cu p:

(13) $$L\int_0^t f(\tau)d\tau = \frac{1}{p}F(p) \ .$$

Pentru demonstrație observăm că : g'(t) = f(t), g(0) =0. Avem : Lg'(t) = Lf(t). Aplicând teorema referitoare la derivarea originalului cu notațiile de mai sus, obținem pLg(t)=Lf(t) din care rezultă (13).

7. Integrarea imaginii. Fie f(t) o funcție original şi F(p)=Lf(t). Integrarea imaginii se traduce prin împărțirea originalului corespunzător cu t :

$$(14) \qquad \int_p^{\infty} f(q)dq = L\frac{f(t)}{t}.$$

8. Produsul a două imagini. Produsul a două originale. Fie f(t) şi g(t) două funcții original şi fie imaginile lor:

$$F(p) = Lf(t), G(p) = Lg(t).$$

Atunci:

1. Produsul este tot o imagine şi anume:

$$(15) \qquad F(p)\cdot G(p) = L\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Integrala din membrul drept se notează :

$$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

şi se numeşte produsul de convoluție al funcțiilor f şi g.

2. Imaginea produsului $f(t)\cdot g(t)$ este

$$(16) \qquad L[f(t)g(t)] = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(q)G(p-q)dq, a > s_0 .$$

4.<u>Transformarea inversă. Formula Mellin-Fourier.</u>

Am văzut că , dată fiind o funcție original f(t), imaginea sa F(p) prin transformarea Laplace este complet determinată. Se pune problema inversă, să se determine originalul f(t) când se cunoaşte imaginea sa F(p). Răspunsul este dat de următoarea :

<u>Teoremă</u>. Dacă f(t) este o funcție original, avînd indicele de creştere s_0, iar F(p) este imaginea sa , egalitatea:

$$(1) \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)e^{pt}dp, a > s_0$$

are loc în toate punctele în care f(t) este continuă.

În fiecare punct c de discontinuitate, valoarea funcției din membrul drept este egală cu :

$$\frac{1}{2}[f(c-0)+f(c+0)].$$

Egalitatea (1) se numeşte *formula lui Mellin-Fourier* şi reprezintă inversa transformării:

$$F(p)=\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-pt}dt.$$

Notăm : $f(t)=L^{-1}(F(p))$.

Demonstrație. Să considerăm funcția:

$$(2) \qquad \varphi(t)=\frac{1}{2}e^{-at}[f(c-0)+f(c+0)],$$

egală cu $e^{-at}f(t)$ pe mulțimea punctelor în care f(t) este continuă. În orice interval mărginit, $\varphi(t)$ nu poate decât puncte de discontinuitate de speța întâi în număr finit, acestea fiind punctele în care f(t) este discontinuă. Valoarea funcției $\varphi(t)$ într-un punct de discontinuitate este egală cu media limitelor sale laterale în acel punct. Observăm că funcția $\varphi(t)$ are următoarele proprietăți:

1. Este derivabilă pe porțiuni;
2. În fiecare punct de discontinuitate, $\varphi(c)=\frac{1}{2}[\varphi(c-0+\varphi(c+0)]$.
3. Este absolut integrabilă pe intervalul $(-\infty,+\infty)$.Primele două proprietăți sunt evidente. A treia se dovedeşte imediat. Deoarece f(t) este o funcție original, $\varphi(t)=0$ pentru t < 0 şi rămâne să arătăm că $\varphi(t)$ este absolut integrabilă pe $(0,\infty)$. Pe acest interval, avem, în toate punctele în care $\varphi(t)$ este continuă :

$$|\varphi(t)|=e^{-at}|f(t)|\le M\cdot e^{-(a-s_0)t}$$

şi pentru $a>s_0$ integrala funcției $M\cdot e^{-(a-s_0)t}$ pe intervalul $(0,\infty)$ este convergentă. De aici rezultă că $\varphi(t)$ este absolut integrabilă pe $(0,\infty)$.

Datorită celor trei proprietăți de mai sus , $\varphi(t)$ poate fi reprezentată printr-o integrală Fourier.

Avem: $$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\sigma\int_{0}^{\infty}f(\tau)e^{-a\tau}\cdot e^{\sigma(t-\tau)}d\tau,$$

deoarece $\varphi(t)=0$ pentru t < 0 .De aici rezultă:

$$e^{at}\cdot\varphi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{(a+i\sigma)t}d\sigma\int_{0}^{\infty}f(\tau)e^{-(a+i\sigma)\tau}d\tau.$$

Cu schimbarea de variabilă $p=a+i\sigma$ deducem :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}dp\int_{0}^{+\infty} f(\tau)e^{-p\tau}\cdot d\tau = e^{at}\varphi(t) = \frac{1}{2}[f(t-0)+f(t+0)].$$

Ținînd seama că , $F(p)=\int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-pt}\cdot d\tau,$ această egalitate se reduce la (1) şi teorema este demonstrată.

5. Teoreme de dezvoltare. Exemple.

Pentru determinarea originalului f(t) când se cunoaşte imaginea sa F(p), se folosesc deseori teoremele următoare (numite teoreme de dezvoltare):

Teorema . Dacă F(p) este o funcție rațională,

$$F(p)=\frac{A(p)}{B(p)},$$

în care gradul numărătorului este mai mic cu cel puțin două unități decât gradul numitorului, iar numitorul B(p) are rădăcini simple, fie acestea $p_0, p_1, p_2,..., p_n$, atunci F(p) este imaginea funcției:

$$(1)\qquad f(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{A(p_k)}{B^{/}(p_k)}\cdot e^{tp_k}\ .$$

Demonstrație. În ipotezele de mai sus, funcția F(p) admite o descompunere de forma:

$$F(p)=\frac{a_0}{p-p_0}+\frac{a_1}{p-p_1}+\frac{a_2}{p-p_2}+...+\frac{a_n}{p-p_n}.$$

Coeficientul a_j se poate calcula integrînd funcția F(p) pe un cerc Γ_j cu centrul în p_j şi de rază suficient de mică astfel ca în interiorul său să nu mai conțină alt pol al funcției F(p). Avem:

$$\int_{\Gamma_j} F(p)dp=\sum_{k=0}^{n}a_k\int_{\Gamma_j}\frac{dp}{p-p_j}$$

În virtutea teoremei lui Cauchy,

$$\int_{\Gamma}\frac{dp}{p-p_k}=0 \text{ pentru } k\neq j$$

Pe de altă parte,

$$\int_{\Gamma}\frac{dp}{p-p_k}=2\pi i \text{ deci}$$

$$\int_{\Gamma_j} F(p)dp=2\pi i a_j.$$

Folosind teorema reziduurilor şi formula de calcul pentru reziduu relativ la un pol simplu, avem:

$$\int_{\Gamma_j} F(p)dp = 2\pi i \cdot rezF(p_j) = 2\pi i \frac{A(p_j)}{B^{/}(p_j)}.$$

Comparăm cu egalitatea precedentă şi deducem:

$$a_j = \frac{A(p_j)}{B^{/}(p_j)}.$$

Cu aceasta, dezvoltarea funcției F(p) devine:

$$F(p) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A(p_k)}{B^{/}(p_k)} \cdot \frac{1}{p - p_k},$$

iar originalul său are evident expresia (1).

Consecința 1. Un caz important în aplicații este acela în care una din rădăcini este nulă.

Fie $p_0 = 0$. Notăm B(p) = pR(p) şi avem:

$$B^{/}(p) = pR^{/}(p) + R(p).$$

Deoarece R(p_k)=0, k $\in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, vom avea :

$$B^{/}(p_0) = B^{/}(0) = R(0), B^{/}(p_k) = p_k \cdot R^{/}(p_k).$$

Descompunerea lui F(p) va lua forma:

$$F(p) = \frac{A(0)}{R(0)} \cdot \frac{1}{p} + \sum_{k=1}^{n} \frac{A(p_k)}{p_k \cdot R^{/}(p_k)} \cdot \frac{1}{p - p_k}$$ şi (1) devine:

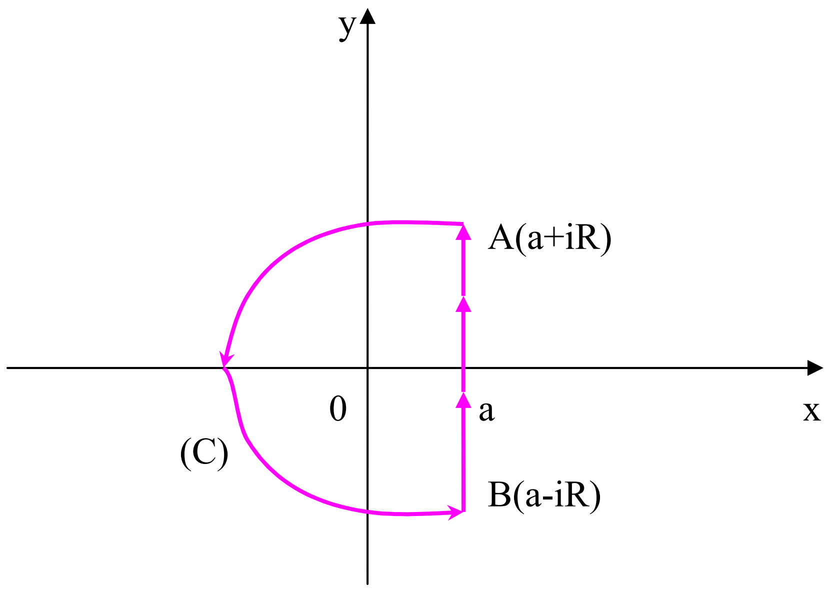
(2) $$f(t) = \frac{A(0)}{R(0)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{A(p_k)}{R^{/}(p_k)} \cdot \frac{e^{p_k t}}{p_k}$$

Această egalitate se numeşte *formula lui Heaviside.*

Consecința 2. În cazul în care $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$ fracție rațională cu grad $A(p) \le gradB(p) - 2,$ iar ecuația B(p) = 0 are de exemplu , p_k rădăcini multiple avînd ordinul de multiplicitate λ_k, atunci :

(3) $$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)e^{pt} dp = \sum_k \operatorname{Re} zG(p_k)$$ unde

(4) $$rezG(p_k)=\frac{1}{(\lambda_k-1)!}[(p-p_k)^{\lambda_k}F(p)\cdot e^{pt}]^{(\lambda_k-1)}_{p=p_k}$$. cu a > max (Re p_k) şi a > 0. Formula de mai sus se obține aplicînd teorema reziduurilor funcției $G(p)= F(p)e^{pt}$ pe curba închisă (Γ) din figură trecînd la limtă pentru $R\to\infty$ şi ținând cont de formula lui Mellin-Fourier:



$\Gamma=(C)\cup BA$.

Exemplu. Se cere originalul funcției:

$$F(p)=\frac{p}{(p^2+1)\cdot(p^2+4)}.$$

Utilizăm prima teoremă de dezvoltare, în care A(p)= p, B(p) = $(p^2+1)(p^2+4)$. Polinomul B(p) are numai rădăcini simple $\pm i,\pm 2i$. Cu $\frac{A(p)}{B^{/}(p)}=\frac{1}{2(2p^2+5)}$ obținem:

$$f(t)=\frac{1}{6}(e^{it}+e^{-it})-\tfrac{1}{6}(e^{2it}+e^{-2it})$$

sau cu oaltă scriere

$$f(t)=\frac{1}{3}(\cos t-\cos 2t).$$

6.Aplicații ale transformatei Laplace . Rezolvarea operațională a ecuațiilor diferențiale și a sistemelor de ecuații diferențiale cu coeficienți constanți.Exemple .

Datorită faptului că prin transformata Laplace operațiilor de derivare și integrare le corespund , operația de înmulțire respectiv de împărțire cu p , este posibilă simplificarea rezolvării unor probleme și tehnicizarea calculelor . Ansamblul acestor procedee bazate pe utilizarea proprietăților transformatei Laplace constituie calculul simbolic sau calculul operațional .

În general , prin aplicarea transformatei Laplace , ecuațiile diferențiale devin ecuații algebrice , a căror rezolvare este mult mai simplă .

Să considerăm problema determinării funcției y(x) , x >0 , care verifică ecuația diferențială liniară cu coeficianți constanți :

(1) $$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y^{/} + a_0 y = f(x), x > 0$$

și condițiile inițiale :

(2) $$y(0) = y_0, y^{/}(0) = y_1, ..., y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}$$

unde f(x) , $y_k, k = \overline{1,n}$ sunt date .

Vom presupune că f(x) este un original și că funcția y(x) care satisface (1) și (2) îndeplinește condițiile impuse originalelor (astfel înmulțim cu $\theta(x)$ (funcția lui Heaviside) și obținem condițiile.

În aceste condiții , aplicând transformata Laplace eciației (1) și ținând seama de proprietățile de liniaritate a transformatatei Laplace , vom obține :

(3) $$a_0 Ly^{(n)} + a_1 Ly^{(n-1)} + ... + a_{n-1} Ly^{/} + a_0 Ly = Lf(x)$$

Notăm : Ly = Y(p) , Lf(x) = F(p) și ținând seama de condițiile inițiale (2) precum și de regula de derivare a unui original , avem egalitățile :

(4) $$\begin{cases} \mathrm{Ly}^{(\mathrm{n})} = p^n Y(p) - (y_0 p^{n-1} + y_1 p^{n-2} + ... + y_{n-2} p + y_{n-1}) \\ Ly^{(n-1)} = p^{n-1} Y(p) - (y_0 p^{n-2} + y_1 p^{n-3} + ... + y_{n-2}) \\ \text{...} \\ Ly^{//} = p^2 Y(p) - (y_0 p + y_1) \\ Ly^{/} = pY(p) - y_0 \end{cases}$$

Înlocuind relațiile (4) în (3) și ținând seama de notațiile făcute , obținem o ecuație de forma :

(5) P(p) Y(p) - G(p) = F(p) ,

unde $P(p)=a_0p^n+a_1p^{n-1}+...+a_{n-1}p+a_0$, G(p) un polinom în p . Ecuația (5) se numeşte *ecuația operațională* corespunzătoare ecuației (1) cu condițiile inițiale (2) (sau problemei Cauchy corespunzătoare). Din ecuația operațională (5) găsim :

$$(6)\qquad Y(p)=\frac{F(p)+G(p)}{P(p)}\ .$$

Soluția ecuației (1) care satisface condițiile (2) este :

$$(7)\qquad y(x) = L^{-1}(Y(p))$$

şi se determină fie folosind formulele lui Mellin-Fourier , fie prin descompuneri convenabile ale funcției Y(p) .

Observație. În general , pentru determinarea unor funcții original când se cunosc imaginile lor se utilizează tabele cu transformata Laplace .

Exemplul 1. Să se determine soluția ecuației

$$y''-7y' + 10y = 3e^x ,\ x >0 ,\ y(0) = 1 ,\ y'(0) = -3.$$

Notăm : Ly = Y(p) . Aplicând transformata Laplace , obținem :

$(p^2-7p + 10)Y(p)-p + 10 = 3/(p-1)$ de unde

$$Y(p)=\frac{p^2-11p+13}{(p-1)(p-2)(p-5)}=\frac{A}{p-1}+\frac{B}{p-2}+\frac{C}{p-5}$$

Găsim : $A=\frac{3}{4},B=\frac{5}{3},C=-\frac{17}{12}.$

Deci : $y(x)=L^{-1}(Y(p))=\frac{3}{4}e^x+\frac{5}{3}e^{2x}-\frac{17}{12}e^{5x},x>0.$

Exemplul 2. Să se determine funcțiile x(t) şi y(t) care verifică sistemul :

$$\begin{cases} x''+2x'+x+y''+y'+y=1\\ 2x'+2x+y''+2y'=2t\end{cases}$$

şi condițiile inițiale : x(0) = 0 , $x'(0)=2$;y(0) = 1 , y'(0) = -2 .

Sistemul operațional corespunzător este :

$$\begin{cases}(p^2+2p+1)X(p)+(p^2+p+1)=\frac{1}{p}+p+1\\ \\ (2p+2)X(p)+(p^2+2p)Y(p)=\frac{2}{p^2}+p\end{cases}$$

Soluția acestui sistem este :

$$X(p)=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{(p+1)^2+1}, Y(p)=-\frac{1}{p^2}+\frac{p+1}{(p+1)^2+1}.$$

Originalele acestor funcții vor fi tocmai soluția sistemului :

$x(t) = t + e^{-t}\sin t$, $y(t) = -t + e^{-t}\cos t$.

7. Probleme propuse.

1) Să se afle transformata Fourier prin cosinus a funcției $f: R_+ \to R, f(t)=\frac{1}{ch2t}$.

2) Să se afle transformata Fourier prin sinus a funcției $f: R_+ \to R, f(t)=\frac{1}{t^2+4}$.

3) Să se afle transformata Fourier prin cosinus a funcției $f(t)=\frac{1}{(4+t^2)^2}$.. . Din rezultatul obținut să se găsească : $\int_0^\infty \frac{t\sin ut}{(4+t^2)^2}dt.$

4) Să se rezolve ecuația integrală de tip Fourier:

$$\int_0^\infty f(t)\cos ut dt=\frac{1}{u^2+1}\ ,\qquad u>0\ .$$

5) Să se determine funcția f(t) care satisface ecuația integrală detip Fourier:

$$\int_0^\infty f(u)\cos ut du=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, t\in(0,\pi)\\ 0, t>\pi\\ -\frac{\pi}{4}, t=\pi\end{cases}$$

6) Flosind metoda operațională să se determine soluția ecuației diferențiale , cu condițiile inițiale specificate :

a) $y'' - 4y = \sin 2x, y(0) = 0, y'(0) = -\frac{1}{4}$.

b) $y''' - y' = \cos^2 x, y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{3}, y''(0) = -1.$

7) Flosind metoda operațională să se integreze sistemul de ecuații diferențiale cu condițiile inițiale specificate :

$$a)\begin{cases} x' + 4x + 4y = 0 \\ y' + 2x + 6y = 0 \\ x(0) = 3, y(0) = 15 \end{cases};\qquad b)\begin{cases} x' = -x + y + z \\ y' = x - y + z \\ z' = x + y + z \\ x(0) = 0, y(0) = 1, z(0) = 1 \end{cases};$$

unde:

$x = x(t); y = y(t);$ $\qquad$ $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$

CAPITOLUL VI

ECUAȚIILE FIZICII MATEMATICE

1. Observații generale asupra ecuațiilor cu derivate parțiale.

1.1 Definiții şi exemple.

Se numeşte ecuație cu derivate parțiale orice ecuație de forma:

$$(1.1)\qquad F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, ..., \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}\right) = 0,$$

unde $F:\Omega x R x R^n x \dots x R^s \rightarrow R$ este o funcție dată, $\Omega \subset R^n$ este un domeniu dat, care se numeşte domeniu de definiție al ecuației considerate, $x=(x_1, x_2, \dots x_n) \in \Omega$.

Funcția $u:\Omega \rightarrow R$ este necunoscuta ecuației.

Iată câteva exemple de ecuații cu derivate parțiale.

1^0 Ecuația lui Laplace:

$$(1.2)\qquad \Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$$

sau ecuația lui Poisson:

(1.3) $-\Delta u = f(x)$ unde $f:\Omega \subset R^n \rightarrow R$ este o funcție dată.

2^0 Ecuația undelor:

$$(1.4)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f(x, u)$$

unde a^2 este un număr pozitiv dat, f o funcție cunoscută, definită pe un domeniu $D=\Omega X R_t$, $\Omega \subset R^n$. Primele n variabile $x=(x_1, x_2, \dots x_n)$ se numesc variabile spațiale. Ultima variabilă, se notează cu t şi se numeşte temporală (reprezintă timpul).

3^0) Ecuația căldurii:

(1.5) $$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(x,u)$$

în care notațiile sunt aceleaşi ca şi la ecuația undelor.

Aceste ecuații sunt des întâlnite în aplicații. Ecuația (1.1) se numeşte liniară, dacă funcția F este liniară în raport cu variabila u şi în raport cu toate derivatele parțiale ale lui u, care intervin în ecuație. Astfel ecuația:

(1.6) $$\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0(x)u = f$$

este liniară cu derivatele parțiale de ordinul întâi.

În cele ce urmează vom studia numai ecuația diferențială liniară de ordinul al doilea. Forma generală este:

(1.7) $$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0(x)u = f$$

unde vom presupune că funcțiile $a_{ij}=a_{ji}$ sunt date şi a_{ij}, a_i, a_0, $f : \Omega \subset R^n \rightarrow R$.

Noțiunea centrală, legată de ecuații este cea de soluție. O funcție $u : \Omega \rightarrow R$ se numeşte soluție a ecuației (1) dacă înlocuită în această ecuație ne conduce la o egalitate în fiecare punct al domeniului Ω.

De exemplu $u(x_1, x_2)=\sin x_1+\cos x_2$ este soluție pe R^2ecuației:

(1.8) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

iar funcția $u(x_1, x_2)=x_1^2 - x_2^2$ este o soluție pe R^2 a ecuației lui Laplace. Ecuația $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + 1 = 0$ nu are nici o soluție.

1.2 Clasificarea ecuațiilor liniare de ordinul al doilea.

Fie $\bar{x} \in \Omega$ un punct oarecare fixat. Ataşăm ecuației (1.7) polinomul:

(2.1) $$P(\bar{x},\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\bar{x})\xi_i \xi_j$$

unde $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in R^n$, P se numeşte *polinomul caracteristic* în punctul $\bar{x}$ al ecuației (1.6). Acest polinom este chiar o formă pătrată.

<u>Definiția 1</u>. Ecuația (1.7) se numeşte *eliptică* în punctul $\bar{x}$, dacă $P(\bar{x},\xi)>0$ sau $P(\bar{x},\xi)<0$, $\forall\xi\in R^n\setminus\{0\}$.

<u>Definiția 2</u>. Ecuația (1.7) se numeşte *hiperbolică* în punctul $\bar{x}$, dacă polinomul caracteristic (2.1) îşi schimbă semnul, adică există cel puțin un vector $\xi\neq0$ şi $\eta\neq0$ astfel încât să avem $P(\bar{x},\xi)>0$ sau $P(\bar{x},\eta)<0$.

<u>Definiția 3</u>. Ecuația (1.7) se numeşte *parabolică* în punctul $\bar{x}$, dacă $P(\bar{x},\xi)>0$, $\forall\xi\in R^n$ sau dacă $P(\bar{x},\xi)\leq0, \forall\xi\in R^n$ şi există cel puțin un vector $\xi_0\neq0$, astfel încât $P(\bar{x},\xi_0)=0$.

Spunem că ecuația (1.7) este eliptică în domeniul Ω, dacă ea este eliptică în fiecare punct al domeniului Ω. Într-un sens analog utilizăm noțiunile de ecuație hiperbolică în domeniul Ω sau de ecuație parabolică în domeniul Ω.

Exemple.

1^0) Polinomul caracteristic al ecuației lui Laplace (1.2) este $P(\xi)=\xi_1{}^2+\xi_2{}^2+....+\xi_n{}^2$; deci $P(\xi)>0$, $\forall\xi\in R^n\setminus\{0\}$ şi ecuația lui Laplace este de tip eliptic pe R^n. Pentru ecuația lui Poisson $P(\xi)=-\left(\xi_1^2+\xi_2^2+...+\xi_n^2\right)<0$ $\forall\xi\in R^n\setminus\{0\}$ şi deci ecuația este tot de tip eliptic pe R^n.

2^0) Polinomul caracteristic al ecuației undelor se poate scrie în felul următor $P(\xi,\delta)=\delta^2-a^2\left(\xi_1^2+\xi_2^2+...+\xi_n^2\right)$. Pentru $\xi=(1,1,\ldots,1)$ şi $\delta=0$ avem $P(\xi,\delta)=-a^2n<0$ iar pentru $\xi=0$ şi $\delta=1$, $P(\xi\ \delta)=1>0$, ceea ce înseamnă că ecuația undelor este de tip hiperbolic în fiecare punct al domeniului său de definiție.

3^0) În cazul ecuației căldurii avem $P(\xi,\delta)=a^2\left(\xi_1^2+\xi_2^2+...+\xi_n^2\right)$. Observăm că $P(\xi,\delta)\leq0$, $\forall\xi\in R^n$ iar pentru $\xi=0$ şi $\delta=1, P(0,1)=0$. Deci ecuația este de tip parabolic în fiecare punct al domeniului de definiție.

Un caz particular important al ecuației (1.7) este ecuația cu două variabile independente. Vom nota $x_1=x$, $y_1=y$; ecuația (1.7) se mai poate scrie şi astfel:

$$(2.2)\qquad a(x,y)\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+2b(x,y)\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+c(x,y)\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+d\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$$

Ecuația (2.2) se numeşte cvasiliniară (aproape liniară) dacă d≠0; dacă d=0, ecuația (2.2) se numeşte liniară. Polinomul caracteristic al ecuației (2.2) este:

(2.3) $P(x,y,\xi,\eta) = a(x,y)\xi^2 + 2b(x,y)\xi\eta + c(x,y)\eta^2$.

Notăm:

(2.4) $\delta(x,y) = b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y)$.

Atunci:

1^0) Dacă δ (x,y)<0, atunci $P(x,y,\xi,\eta) > 0$ sau < 0 $\forall(\xi , \eta)\in R^2\setminus\{0,0\}$. În acest caz ecuația (2.2) este eliptică în punctul (x,y).

2^0) Dacă δ (x,y)=0, atunci $P(x,y,\xi,\eta) \geq 0$ sau ≤ 0 $\forall(\xi , \eta)\in R^2$ şi P(x,y;0,1)=0. Prin urmare în acest caz ecuația (2.2) este parabolică în punctul (x,y).

3^0) Dacă δ (x,y)>0, atunci polinomul (2.3) îşi schimbă semnul, deci ecuația (2.2) este hiperbolică în punctul (x,y).

1.3. Forma canonică a ecuațiilor liniare de ordinul al doilea.

Orice ecuație de forma:

(3.1) $$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0(x)\cdot u = f$$

se numeşte ecuație de formă canonică dacă $\lambda_i \in \{-1, 0, 1\}$ pentru fiecare $i\in\{1,2,\dots,n\}$.Polinomul caracteristic al ecuației (3.1) este $P(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i^2$. Deoarece λ_i pot fi egali numai cu –1, 0 sau 1, această formă pătratică este de formă canonică în sensul întâlnit în algebra liniară. Este evident că $P(\xi)>0, \forall,\xi\neq 0 \Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2= \dots =\lambda_n=1$, iar $P(\xi)<0\ \forall,\xi\neq 0\Leftrightarrow\lambda_1=\lambda_2= \dots =\lambda_n=-1$. Prin urmare forma canonică a ecuațiilor eliptice este:

$$\pm \Delta u + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0(x)u = f .$$

Dacă $\lambda_1=\lambda_2= \dots =\lambda_k=1$ sau $\lambda_1=\lambda_2= \dots =\lambda_k=-1$ şi $\lambda_{k+1}= \dots =\lambda_n=0$ unde k<n, vom avea $P(\xi)\geq 0, \forall,\xi\in R^n$ respectiv $P(\xi)\leq 0\ \forall,\xi\in R^n$, ceea ce înseamnă că forma canonică a ecuațiilor parabolice este :

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0(x) \cdot u = f$$

Dacă există cel puțin un coeficient λ_i egal cu +1 şi cel puțin unul egal cu –1 atunci şi doar atunci ecuația (3.1) va fi forma canonică a ecuațiilor hiperbolice.

Prezintă interes să transformăm o ecuație dată în forma canonică .

Vom prezenta acest lucru pentru ecuația (1.7) cu coeficienți constanți. Notăm cu $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j \in \{1,2,...,n\}}$ matricea polinomului caracteristic $P(\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \xi_j$. Din algebra liniară se cunoaşte că există, o matrice nesingulară $B = \left(b_{ij}\right)_{i,j \in \{1,2,...,n\}}$ astfel că după înlocuirea variabilelor $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ cu variabile noi $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ date de egalitățile

(3.2) $$\eta_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \xi_j \quad , i = \overline{1, n}$$

polinomul caracteristic se transformă în forma canonică $Q(\eta) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \eta_i^2$. Între matricile A şi B şi între numerele $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ există următoarea relație:

(3.3) $$B^* AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$ unde B^* este adjuncta lui B.

Are loc următoarea teoremă:

<u>Teorema 3.1</u>. Dacă coeficinții a_{ij} sunt constanți, atunci după înlocuirea variabilelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ cu variabilele $y_1, y_2, \ldots, y_n$ date de egalitățile:

(3.4) $$y_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j \quad , i = \overline{1, n}$$

ecuația (1.7) se transformă în:

(3.5) $$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2} + \sum_{i=1}^{n} b_i(y) \frac{\partial u}{\partial y_i} + b_0(y) = g$$

unde: $\lambda_i \in \{-1. 0, 1\}$.

<u>Demonstrație</u>. Din (3.4) rezultă egalitățile:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial u}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial y_k} b_{ik}$$

şi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial y_j} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y_k} \right) = \sum_{k,l=1}^{n} b_{ik} b_{jl} \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_l}.$$

După înlocuirea acestor egalităţi în ecuaţia (1.7) obţinem:

$$(3.6)\quad \sum_{k,l=1}^{n} \left(\sum_{i,j=1}^{n} b_{ik} a_{ij} b_{jl} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_l} + \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i(x) b_{ik} \right) \frac{\partial u}{\partial y_k} + a_0(x)u = g.$$

Însă $\sum_{i,j=1}^{n} b_{ik} a_{ij} b_{jl}$ este elementul de pe linia k şi coloana l a matricei B^*AB.

Deci conform egalităţii (3.3) avem:

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{ik} a_{ij} b_{jl} = \begin{cases} \lambda_k, & \text{daca } k = l \\ 0, & \text{daca } k \neq l \end{cases}.$$

Egalităţile (3.4) le scriem sub formă matricială $y=B^*x$. Rezolvând acest sistem în raport cu x obţinem $x=(B^*)^{-1}y$. În sfârşit, notând $b_k(y) = \sum_{i=1}^{n} a_i\left((B^*)^{-1} y\right) b_{ik}, b_0(y) = a_0\left((B^*)^{-1} y\right)$ si $g(y) = f\left((B^*)^{-1} y\right)$ din (3.6) obţinem forma canonică (3.5).

1.4. Probleme de bază ale teoriei ecuaţiilor cu derivate parţiale. Condiţii la limită şi condiţia Cauchy

Problemele cele mai importante ale acestei teorii se formează în mod diferit prin cele trei tipuri de ecuaţii. Formulăm prezentarea problemelor Dirichlet şi Neumann pentru ecuaţiile eliptice şi a problemelor Cauchy pentru ecuaţiile de tip parabolic şi hiperbolic. Considerăm ecuaţia:

$$(4.1)\quad D(x,D)u=f \text{ unde } D(x,D)u = \sum_{i,j}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0(x)a$$

definită pe un domeniu mărginit $\Omega \subset R^n$.Presupunem că ecuaţia (4.1) este eliptică în fiecare punct al domeniului Ω.($\partial\Omega$ frontiera domeniului Ω).

PROBLEMA Dirichlet. Fiind date două funcţii f şi h, f: $\Omega\to R$, h:$\partial\Omega\to R$ să se găsească o funcţie u:$\Omega\to R$ care să satisfacă următoarele două condiţii:

(4.2) $D(x,D)u(x)=f(x), \quad \forall x\in\Omega$

şi

(4.3) $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = h(x_0), \quad \forall x_0 \in \partial\Omega$.

Condiţia (4.2) înseamnă că funcţia căutată u trebuie să fie o soluţie a ecuaţiei (4.1) în domeniul Ω. Egalitatea (4.3) se numeşte condiţia la limită a problemei Dirichlet, şi se va nota pe scurt cu $u|_{\partial\Omega} = f$.

PROBLEMA Neumann. Fiind date două funcţii f: $\Omega\to R$, h:$\partial\Omega\to R$ să se găsească o funcţie u:$\Omega\to R$ care să satisfacă următoarele condiţii:

(4.4) $D(x,D)u(x)=f(x), \quad \forall x\in\Omega$

şi

(4.5) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{du(x)}{d\upsilon} = h(x_0), \quad \forall x_0 \in \partial\Omega$

unde

(4.6) $\frac{du(x)}{d\upsilon} = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos\left(N_0, x_i\right)$

iar N_0 este normala exterioară la $\partial\Omega$ faţă de Ω în punctul x_0.

Condiţia (4.5) se numeşte condiţie la limită şi se va nota pe scurt $\left.\frac{du}{d\upsilon}\right|_{\partial\Omega} = h$.

Observăm că în cazul ecuaţiei lui Laplace, condiţia la limită a problemei lui Neumann devine deosebit de simplă:

$$\frac{du(x)}{d\upsilon} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\cos\left(N_0, x_i\right) = \frac{\partial u}{\partial N_0}$$

adică tocmai derivata funcţiei u în direcţia normalei N_0.

Pe lângă cele două probleme în practică se mai întâlnesc şi combinaţii ale lor. Să considerăm mai departe, numai ecuaţii parabolice de forma particulară:

(4.7) $\frac{\partial u}{\partial t} D\left(x, D\right)u = f$

şi ecuaţii hiperbolice de forma particulară:

(4.8) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - D(x,D)u = f,$$

unde D este dat în (1). Presupunem că expresia D(x,D) este eliptică pe tot domeniul de variație al variabilei spațiale x.

<u>**PROBLEMA Cauchy pentru ecuația parabolică**</u> (4.7). Fiind date două funcții $f:R^n xR_+ \to R$ şi $\alpha:R^n \to R$ să se găsească o funcție $u:R^n xR_+ \to R$ care satisface următoarele condiții:

(4.9) $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - D(x,D)u(x,t) = f(x,t),\ \forall (x,t) \in R^n xR_+$$

şi

(4.10) $$\lim_{(x,t)\to(\overline{x},0)} u(x,t) = \alpha(\overline{x}),\ \forall \overline{x} \in R^n,$$

unde $(x,t) \in R^n \times R_+$.

condiția (4.10) se numeşte condiția inițială a problemei Cauchy. Pe viitor condiția (4.10) se va nota pe scurt $u/_{t=0}=\alpha$.

<u>**PROBLEMA Cauchy pentru ecuația hiperbolică**</u> **(4.8).**

Articol I. Fiind date trei funcții $f:R^n x\ R_+ \to R$ şi α, $\beta:R^n \to R$ să se găsească o funcție $u:R^n x\ R_+ \to R$, care satisface următoarele condiții:

(4.11) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - D(x,D)u(x,t) = f(x,t),\ \forall (x,t) \in R^n xR_+$$

(4.12) $$\lim_{(x,t)\to(\overline{x},0)} u(x,t) = \alpha(\overline{x}),\ \forall \overline{x} \in R^n$$

şi

(4.13) $$\lim_{(x,t)\to(\overline{x},0)} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \beta(\overline{x}),\ \forall \overline{x} \in R^n$$

unde $(x,t) \in R^n \times R_+$.

Condițiile inițiale (4.12) şi (4.13) le vom nota $u|_{t=0} = \alpha si u|_{t=0} = \beta$.

Facem o importantă observație relativă la toate problemele de mai sus. Pentru ca enunțurile acestor probleme să fie complete trebuie să mai indicăm şi clasele de funcții din care fac parte coeficienții a_{ij}, a_i şi a_0, funcțiile f, α, β şi g,

respectiv clasele de funcții în care se caută soluția u a problemei. Toate aceste precizări se vor face în capitolele ce urmează când se vor studia efectiv aceste probleme.

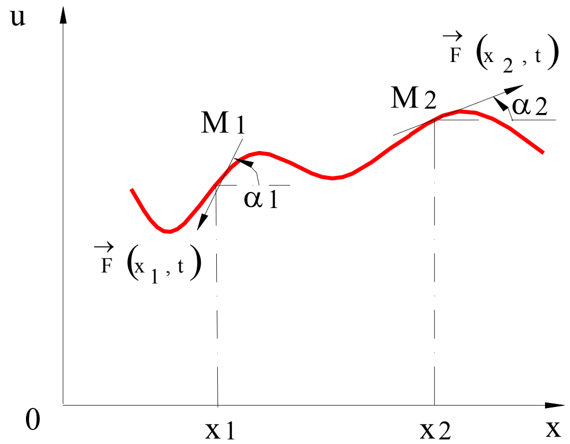
Mai subliniem că la studierea acestor probleme se urmăresc trei aspecte principale. Existența soluției, unicitatea soluției şi găsirea unor metode care să ne permită determinarea efectivă a soluției sau a unei aproximații a soluției.

1.5. Probleme de fizică ce conduc la ecuații cu derivate parțiale de ordinul al doilea.

Ecuațiile cu derivate parțiale modelează fenomene din fizică, chimie, tehnică etc. Astfel ecuațiile hiperbolice se întâlnesc la descrierea fenomenelor ondulatorii. Ecuațiile parabolice descriu fenomene de transfer cum ar fi transferul de substanțe în procesele de difuzie. Ecuațiile eliptice se întâlnesc la fenomenele statice, deci la fenomene care nu variază în timp. Vom prezenta câteva exemple de descriere matematică a unor probleme de fizică.

Să considerăm o coardă flexibilă de lungime l, fixată la capete care în poziția de echilibru şi momentul t=0 coarda este scoasă din echilibru şi începe să vibreze. Ne propunem să determinăm pozițiile coardei pentru $t > 0$ presupunând că se cunoaşte poziția inițială a ei şi vitezele punctelor ei la momentul t=0. Facem următoarele ipoteze simplificatoare: asupra coardei acționează numai tensiunea şi forțele de inerție. Coarda vibrează într-un plan fix, şi deplasarea coardei de la poziția de echilibru este mică. O astfel de situație se realizează dacă scoteam coarda din poziția de echilibru şi o lăsăm să vibreze. Transcriem în limbaj matematic problema de mai sus. Alegem axele de coordonate x O u în planul vibrației astfel ca intervalul $0 \le x \le l$ să coincidă cu poziția de repaus a coardei. Funcția u va reprezenta deplasarea coardei de la poziția de repaus. Pentru determinarea poziției coardei va trebui să găsim tocmai funcția u=u(x,t).

Alegem arbitrar un arc $\hat{M_1M_2}$ de pe coardă. Fie x_i abscisa punctului M_i, i=1,2. Alegerea arcului considerat acționează tensiunea reprezentată de vectorii $\vec{F}(x_i,t)$ i=1,2 situați pe tangenta în M_i la curba u=u(x,t):



Forțele de inerție care acționează asupra lui $\overset{\frown}{M_1M_2}$ sunt paralele cu axa Ox şi valoarea lor absolută este:

$$-\int_{x_1}^{x_2}\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx$$

unde ρ(x) reprezintă densitatea coardei.

Din fizică se ştie că suma forțelor care acționează asupra arcului $\overset{\frown}{M_1M_2}$ este egală cu zero. Deci proiecțiile acestei sume pe cele două axe este egală cu zero:

(5.1) $$F(x_2,t)\cos\alpha_2 - F(x_1,t)\cos\alpha_1=0$$

(5.2) $$F(x_2,t)\sin\alpha_2 - F(x_1,t)\sin\alpha_1 - \int_{x_1}^{x_2}\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx=0$$

(aici am notat cu $F(x_2;t)$ modulul forței $\vec{F}(x_i,t)$ şi au α_i unghiul format de tangenta la $\overset{\frown}{M_1M_2}$ cu axa Ox.) Avem:

$$\cos\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha_i}} = \left.\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}}\right|_{x=x_i} \approx 1$$

şi

$$\sin\alpha_i = \frac{\mathrm{tg}\alpha_i}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha_i}} = \left.\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}}\right|_{x=x_i} \approx \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_i}$$

unde am ținut cont de faptul că deplasarea coardei de la poziția de echilibru este foarte mică, deci $\frac{\partial u}{\partial x}$ ia valori mici şi atunci $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ se poate neglija. Astfel din (5.1) obținem egalitatea: $F(x_1,t)= F(x_2,t)$. Arcul $\overset{\frown}{M_1M_2}$ fiind ales arbitrar, această egalitate ne arată că F nu depinde de x. Uşor ne putem convinge că funcția F nu depinde nici de timp. Într-adevăr, legea lui Hooke ne arată că tensiunea variază în timp numai dacă variază lungimea coardei.

Însă lungimea coardei este dată de integrala:

$$\int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\,dx\,.$$

Având în vedere că vibrațiile sunt mici găsim că:

$$\int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\,dx \approx \int_0^1 dx = 1\,.$$

Deci lungimea coardei se poate considera neschimbată în timpul vibrației. Prin urmare F nu depinde de t. Cu aceste observații, din (2) rezultă că:

$$F\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_2} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_1}\right) - \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,dx = 0$$

a) Ținând seama de relația

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_2}-\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_1}=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx$$

obținem egalitatea:

$$\int_{x_1}^{x_2}\left\{F\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\}dx=0$$

valabilă pentru orice pereche de puncte x_1 şi x_2 de pe intervalul (0,l) ceea ce este posibil numai atunci când:

$$F\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0.$$

Presupunând că densitatea ρ este constantă şi notând $a^2=\frac{F}{\rho}$ ajungem la *ecuația coardei vibrante:*

(5.3) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Problema de fizică formată inițial se poate enunța matematic în felul următor: Să se găsească funcția u=u(x,t) definită pentru $0<x<l$ şi $t>0$, care satisface următoarele condiții:

1^0 $$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=0,\quad \forall(x,t)\in(0,l)\times R_+$$

2^0 $$\left.u(x,t)\right|_{t=0}=\varphi(x),\ \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x),\ \forall x\in(0,l)$$

3^0 u(0,t)=u(l,t)=0, $\forall t>0$,

unde φ şi ψ sunt funcții date. Funcția φ reprezintă profilul inițial al coardei iar funcția ψ - viteza punctelor coardei în momentul inițial. Deci am ajuns la o problemă Cauchy – Dirichlet pentru ecuația coardei vibrante.

Trecem la prezentarea unei probleme de fizică care ne va conduce la ecuația căldurii.

Considerăm o bară subțire, de lungime l, aşezată de-a lungul intervalului $0\le x\le l$ de pe axa ox a sistemului de coordonate x O u. Presupunând că suprafața

laterală a barei este termic izolată, deci schimb de căldură între bară şi mediul ambiant se produce numai prin cele două capete ale barei şi în orice moment, admițând că se cunoaşte temperatura fiecăruia punct al barei la momentul t=0 şi temperatura ambelor capete în orice moment.

Presupunem că temperatura barei, în secțiunile perpendiculare pe axa ei, este constantă. Adică temperatura u depinde numai de abscisa x a barei şi de timpul t. Considerăm o porțiune oarecare M_1M_2 din bară, delimitată de abscisele x_1 şi x_2. Conform legii lui Fourier, cantitatea de căldură care întră în porțiunea M_1M_2 din capătul x_1 este dată de egalitatea:

$$q(x_1,t) = -k\tau \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_1}$$

iar prin capătul x_2, de egalitatea:

$$q(x_2,t) = -k\tau \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_2}$$

aici k este o costantă numită coeficientul de conductibilitate termică iar constanta τ este aria secțiunii perpendiculare a barei. Creşterea cantității de căldură în porțiunea M_1M_2 şi în intervalul de timp (t_1,t_2) este dată de egalitatea:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2}\left[q(x_2,t)+q(x_1,t)dt\right] = \int_{t_1}^{t_2} k\tau\left\{\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_2} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_1}\right\}dt$$

sau

$$Q = \int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} k\tau\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dxdt\,.$$

Pe de altă parte, această creştere a cantității de căldură se mai poate exprima şi cu creşterea temperaturii

$$Q = \int_{x_1}^{x_2} c\rho\sigma\{u(x,t_2)-u(x,t_1)\}dx$$

sau cu

$$Q = \int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} c\rho\sigma\frac{\partial u}{\partial t}dxdt$$

unde ρ este densitatea barei, iar c este o constantă numită căldura specifică a barei. Egalând cele două integrale care exprimă pe Q, găsim:

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2}\left\{c\rho\sigma\frac{\partial u}{\partial t} - k\rho\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}dxdt = 0\,.$$

Ținând seama de faptul că această egalitate este adevărată pentru orice $t_1>0$, $t_2>0$ şi orice $x_1, x_2 \in (0,l)$, găsim că:

$$c\rho\sigma\frac{\partial u}{\partial t} - k\rho\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

sau

$$(5.4)\qquad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

unde $a^2 = \frac{k}{c\rho}$. Deci temperatura barei satisface ecuația (5.4) numită *ecuația căldurii*.

Problema fizică pe care ne-am propus-o o putem transcrie prin următoarea formulare matematică: Să se găsească funcția $u=u(x,t)$ definită pentru $0<x<l$ şi $t>0$ care satisface următoarele condiții:

1^0 $\quad \frac{\partial\ u(x,t)}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, \quad \forall (x,t)\in(0,l)\times R_+$

2^0 $\quad u|_{t=0} = u_0(x),\ \forall x\in(0,l)$

3^0 $\quad u|_{x=0} = \alpha(t), u|_{x=l} = \beta(t)\ \ \forall t>0$

unde u_0, α şi β sunt funcții date. Funcția u_0 reprezintă temperatura barei la momentul t=0, α ne dă temperatura barei la capătul x=0, iar β temperatura barei la capătul x=l, în orice moment t>0. Astfel problema considerată ne-a condus la o problemă Cauchy – Dirichlet pentru ecuația căldurii.

Ultimul exemplu din fizică pe care îl considerăm ne va conduce la ecuația lui Laplace. Să studiem ecuația unui fluid într-un domeniu Ω din planul xOy. Formulăm următoarea problemă: cunoscând vitezele fluidului pe frontiera lui Ω să se determine aceste viteze în punctele domeniului Ω. Facem aici nişte ipoteze

simplificatoare. Presupunem că mişcarea este staţionară, adică viteza de mişcare nu depinde de timp; deci ea depinde numai de poziţia punctelor din Ω. Notăm cu $\overline{v}(x,y)$ această viteză. Presupunem că există potenţial u=u(x,t) al vitezei, adică:

$$\overline{v}(x,y) = -\operatorname{grad} u(x,y),\ \forall (x,y) \in \Omega .$$

Mai presupunem că în domeniul Ω nu există nici o sursă, deci punctele prin care să apară sau să dispară fluid. Această ipoteză se exprimă prin egalitatea:

$$\operatorname{div} \overline{v}(x,y) = 0,\ \forall (x,y) \in \Omega .$$

Considerând ultimele egalităţi, obţinem:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u(x,y) = 0,\ \forall (x,y) \in \Omega$$

sau

(5.5) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ \forall (x,y) \in \Omega .$$

Prin urmare, potenţialul vitezelor satisface ecuaţia lui Laplace (5.5). Dacă mai ţinem seamă şi de egalitatea

$$\frac{du}{dN} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos(N,x) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(N,y) = \left(\overline{v}, \overline{N_1}\right)$$

unde N este normala la $\partial\Omega$, exterioară faţă de Ω, iar N_1 este vectorul unitar în direcţia lui N, atunci problema fizică considerată se transpune astfel: să se găsească funcţia u=u(x,y) definită în domeniul Ω, care satisface următoarele condiţii:

1^0 $$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0, \quad \forall (x,y) \in \Omega$$

2^0 $$\left.\frac{du}{dN}\right|_{\partial\Omega} = f$$

unde $f:\partial\Omega \to R$ este o funcţie dată. Problema fizică considerată ne-a condus la o problemă Neumann pentru ecuaţia lui Laplace.

2.Ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul doi. Clasificare. Reducerea la forma canonică

Studiul unor fenomene fizice ca vibraţiile firelor şi membranelor, propagarea căldurii, propagarea undelor electromagnetice ş.a. conduc la ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale de ordinul doi. Deducerea acestor ecuaţii ce descriu în timp şi spaţiu evoluţia fenomenului studiat se realizează prin aplicarea unor legi specifice fenomenului respectiv ţinându-se seama de condiţiile concrete de apariţia şi evoluţia fenomenului respectiv. Din acest motiv, pe lângă ecuaţia diferenţială ce reprezintă rezultatul modelării matematice a fenomenului studiat trebuie date condiţiile suplimentare concrete în care s-a realizat fenomenul, fapt ce asigură în general unicitatea şi existenţa soluţiei problemei cercetate.

Rezolvarea diferitelor probleme care conduc la ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale de ordinul doi este strâns legată de reducerea acestor ecuaţii la forme mai simple printr-o schimbare a variabilelor independente. Aceste forme ireductibile la altele mai simple le vom numi forme canonice.

Fie ecuaţia cu două variabile independente x şi y:

$$(1)\qquad a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$$

unde coeficienţii a, b, c şi funcţia necunoscută u sunt de clasă $C^2(D)$, $D\subset R^2$iar a,b,c nenuli simultan în D.

Observăm că ecuaţia (1) este liniară în general numai cu derivatele de ordinul doi. Din acest motiv (1) se numeşte ecuaţie cvasiliniară (aproape liniară).

Ecuaţiei (1) îi ataşăm ecuaţia

$$(2)\qquad a(x,y)dy^2-2b(x,y)dydx+c(x,y)dx^2=0$$

numită *ecuaţia caracteristică* a ecuaţiei (1).

Să considerăm schimbarea de variabile:

$$(3)\qquad \begin{cases}\xi=\xi(x,y)\\ \eta=\eta(x,y)\end{cases}$$

cu proprietatea $\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} \neq 0$ ceea ce asigură posibilitatea determinării lui x,y din (3).

$$\left(x = \Psi_1(\xi,\eta), y = \Psi_2(\xi,\eta)\right).$$

Pentru derivatele funcției u vom obține:

(4) $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

(5) $$\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right.$$

(6) $$\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right.$$

(7) $$\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\cdot\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \right.$$
$$+ \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}$$

Înlocuind aceste expresii în (1) aceasta devine tot o ecuația cvasiliniară:

(1’) $$A(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2B(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + C(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + D(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}) = 0$$

unde noii coeficienți au expresiile:

(8) $$\begin{cases} A(\xi,\eta) = a\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 \\ B(\xi,\eta) = a\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} + b\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + c\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} \\ C(\xi,\eta) = a\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 \end{cases}$$

Vom determina schimbarea de variabile (3) astfel ca ecuația (1’) să ia o formă cât mai simplă.

Deoarece ecuația caracteristică (2) se descompune în două ecuații diferențiale ordinare de ordinul întâi rezultă că cele două familii de curbe integrale pot fi reale, distincte, reale şi confundate sau complex conjugate în funcție de

semnul expresiei $\delta(x,y) = b^2(x,y) - a(x,y) \cdot c(x,y)$. Ecuațiile diferențiale de tipul (1) pot fi clasificate în:

I) Ecuații de tip *hiperbolic* dacă $\delta(x,y)>0$, $\forall(x,y)\in\Delta\subseteq D$

II) Ecuații de tip *parabolic* dacă $\delta(x,y)=0$, $\forall(x,y)\in\Delta\subseteq D$

III) Ecuații de tip *eliptic* dacă $\delta(x,y)<0$, $\forall(x,y)\in\Delta\subseteq D$.

I) Reducerea la forma canonică a ecuațiilor de tip hiperbolic ($\delta>0$).

Dacă a şi c nu sunt simultan nuli, de exemplu $a\neq0$ ecuația (2) se descompune în:

(9) $$\frac{dy}{dx} = \mu_1(x,y);\ \frac{dy}{dx} = \mu_2(x,y)$$

unde μ_1 şi μ_2 sunt rădăcinile ecuației

(2') $a\mu^2 - 2b\mu + c = 0$.

b) Prin integrarea ecuației (9) se obține

(10) $$\begin{cases} \varphi_1(x,y) = C_1 \\ \varphi_2(x,y) = C_2 \end{cases}.$$

Printr-o deplasare pe una din curbele (10), avem respectiv:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}dy = 0;\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}dy = 0.$$

Ținând seama că (10) s-au obținut prin integrarea ecuațiilor (9) rezultă:

$$\mu_1 = -\frac{\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}}{\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}},\quad \mu_2 = -\frac{\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}}{\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}}.$$

Inlocuind în (2') avem:

(2``) $$\begin{cases} a\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + c\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2 = 0 \\ a\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + c\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)^2 = 0 \end{cases}.$$

Comparând (2'') cu (8) observăm că este indicată următoarea schimbare de variabile:

$$(11) \qquad \begin{cases} \xi = \varphi_1(x,y) \\ \eta = \varphi_2(x,y) \end{cases}$$

pentru care avem A≡0, C≡0. Coeficientul B nu poate fi nul. Într-adevăr, cu schimbarea (11) B are expresia:

$$B = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \left[a\varphi_1\varphi_2 - b(\varphi_1 + \varphi_2) + c \right]$$

şi ținând seama de relațiile între rădăcinile şi coeficienții ecuației (2') rezultă:

$$B = 2\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \cdot \frac{ac - b^2}{a}.$$

Deoarece prin ipoteză $a \neq 0$ (φ_1 şi φ_2 depind de y) , b^2-ac>0 rezultă $B \neq 0$. Ecuația (1') poate fi scrisă (:$2B_1$) sub forma:

$$(12) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + H\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0.$$

Ecuația (12) este forma canonică a ecuației de tip hiperbolic.

II) ***<u>Reducerea la forma canonică a ecuațiilor de tip parabolic (δ=0)</u>***

Cele două ecuații diferențiale (9) se reduc la una singură $\frac{dy}{dx} = \mu(x,y)$, unde μ verifică:

$$(14) \qquad \begin{cases} a\mu^2 - 2b\mu + c = 0 \\ a\mu - b = 0 \end{cases}.$$

Fie $\varphi(x,y)=C$ integrala generală a ecuației $\frac{dy}{dx} = \mu(x,y)$.

Pentru o deplasare pe una din aceste curbe avem:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0.$$

Deducem uşor că $\mu = -\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}$. Înlocuind în (14) obținem:

$$\begin{cases} a\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + c\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = 0 \\ a\frac{\partial\varphi}{\partial x} + b\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \end{cases}.$$

Observăm din (8) că, dacă facem schimbarea de variabile $\xi=\varphi(x,y)$, $\eta=x$ (sau $\eta=y$) găsim A=0, B=0, C=a. Cum $a\neq 0$, din (1) obținem:

$$(15) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + P\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial\xi}, \frac{\partial u}{\partial\eta}\right) = 0.$$

Ecuația (15) este forma canonică a ecuației de tip parabolic.

Am presupus $a\neq 0$. Dacă a=0, din condiția b^2-ac=0 rezultă b=0 şi ecuația (1) ar fi avut de la început forma canonică.

III) <u>Reducerea la forma canonică a ecuațiilor de tip eliptic (δ<0)</u>

Funcțiile μ_1 şi μ_2 din (9) sunt imaginar conjugate. Aceeaşi proprietate vor avea şi funcțiile φ_1 şi φ_2 din (10).

Cu schimbarea (11) ecuația (1) s-a redus la (12). Pentru a reveni la funcțiile reale, vom face o nouă schimbare de variabile. Din egalitățile: $\xi=\alpha+i\beta$; $\eta=\alpha-i\beta$ deducem $\alpha = \frac{1}{2}(\xi+\eta)$, $\beta = \frac{1}{2i}(\xi+\eta)$.

Avem:

$$\frac{\partial u}{\partial\xi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha} - i\frac{\partial u}{\partial\beta}\right) \text{ şi } \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}\right).$$

Se obține astfel forma canonică a ecuației de tip eliptic:

$$(16) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2} + E\left(\alpha, \beta, u, \frac{\partial u}{\partial\alpha}, \frac{\partial u}{\partial\beta}\right) = 0.$$

Observație. Deoarece $\delta<0$, ecuația caracteristică (2) are curbele caracteristice complex conjugate:

$$\begin{cases}\varphi(x,y)=\alpha(x,y)+i\beta(x,y)=C_1\\ \psi(x,y)=\alpha(x,y)-i\beta(x,y)=C_2\end{cases}.$$

Efectuând schimbarea de variabile:

$$\begin{cases}\xi=\alpha(x,y)\\ \eta=\beta(x,y)\end{cases}\quad (x,y)\in\Omega, \text{cu}\, \delta(\Omega)<0$$

obținem $B(\xi,\eta)\equiv 0$, $A(\xi,\eta)=C(\xi,\eta)$ şi ecuația (1) primeşte forma canonică:

$$(17)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+E^*\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=0.$$

3. Ecuații liniare şi omogene în raport cu derivatele de ordinul al doilea, cu coeficienți constanți.

Să considerăm ecuația:

$$(1)\qquad a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

unde a, b, c sunt constante.

Ecuația caracteristică ataşată ecuației (1) este:

$$(2)\qquad a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2b\frac{dy}{dx}+c=0.$$

Rădăcinile μ_1 şi μ_2 ale ecuației (2) sunt constante. Ecuația (2) se înlocuieşte prin ecuațiile

$dy - \mu_1 dx = 0$, $dy - \mu_2 dx = 0$ care prin integrare dau:

$$\begin{cases}y-\mu_1 x=C_1\\ y-\mu_2 x=C_2\end{cases}\quad \text{unde } C_1 \text{ şi } C_2 \text{ sunt constante.}$$

Vom aduce ecuația (1) la forma canonică.

Cazul I. Dacă $\delta=b^2-ac>0$, ecuația (1) este de tip hiperbolic $\mu_1\neq\mu_2$ (reale). Cu schimbarea de variabile

$$(3)\qquad \begin{cases}\xi=y-\mu_1 x\\ \eta=y-\mu_2 x\end{cases}$$

obținem:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mu_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\mu_1\mu_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \mu_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\mu_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - (\mu_1 + \mu_2)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \mu_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Înlocuind în (1) şi ținând seama că μ_1 şi μ_2 sunt rădăcinile ecuației $a\mu^2$-$2b\mu+c=0$, obținem ecuația:

$$4 \cdot \frac{ac-b^2}{a} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

de unde obținem forma canonică:

(4) $$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Ecuația (4) se integrează imediat. Într-adevăr, scrisă sub forma:

(4') $$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0$$

se obține $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \varphi(\eta)$. Integrând această ultimă ecuație, obținem: $u = \int \varphi(\eta)d\eta + f(\xi)$ sau

(5) $u=f(\xi)+g(\eta)$.

Revenind la vechile variabile, soluția generală a ecuației (1) este:

(5') $u(x,y)=f(y-\mu_1 x)+g(y-\mu_2 x)$.

<u>Cazul II.</u> Dacă $\delta=0$, ecuația este de tip parabolic, în ipoteza că $a\neq0$, $\mu_1=\mu_2=\frac{b}{a}$ şi ecuația diferențială (2) se reduce la $ady-bdx=0$. Integrala generală a acestei ecuații este $ay-bx=C$.

Schimbarea de variabile:

$$\begin{cases} \xi = ay - bx \\ \eta = x \end{cases}$$

aduce ecuația (1) la forma canonică

(6) $$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0 .$$

Într-adevăr în acest caz obținem:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2b \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -ab \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + a \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$$

şi înlocuind în (1) obținem ecuația

$$a\left(ac - b^2\right) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + a \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$$

care se reduce ($\delta=0$) la (6).

Am presupus $a\neq0$. În caz contrar, din b^2-ac=0, ar rezulta b=0 şi ecuația ar fi avut de la început forma canonică. Pentru integrarea ecuației (6) observăm că putem scrie:

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0 \quad \text{de unde} \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = f(\xi).$$

Integrând încă o dată, obținem $u = \eta f(\xi)+g(\eta)$. Soluția generală a ecuației (1) se obține din aceasta revenind la vechile variabile:

(7) $$u(x, y)= x\, f(ay - bx)+g(ay - bx) .$$

<u>Cazul III</u>. În cazul $\delta<0$, ecuația (1) este de tip eliptic, forma sa canonică este ecuația lui Laplace:

(8) $$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = 0 .$$

4. Coarda infinită. Metoda schimbării variabilelor (metoda lui D'Alembert şi Euler). Formula lui D'Alembert.

Să considerăm ecuaţia:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

care se numeşte *ecuaţia coardei vibrante* sau ecuaţia *undelor plane omogene*. Prin coardă se înţelege un corp perfect elastic la care două din dimensiunile sale sunt neglijabile în raport cu a treia. Dacă lungimea coardei este mare şi ne interesează numai vibraţiile unei porţiuni, suficient de depărtate de capetele coardei astfel încât aceasta să nu influenţeze porţiunea care nu interesează, coarda se consideră infinită.

În studiul vibraţiilor libere ale coardei, parametrii care intervin în această ecuaţie au următoarele semnificaţii:

Să considerăm o coardă de lungime l care, în repaus, ocupă poziţia AB pe axa Ox, A şi B având abscisele 0 şi l .

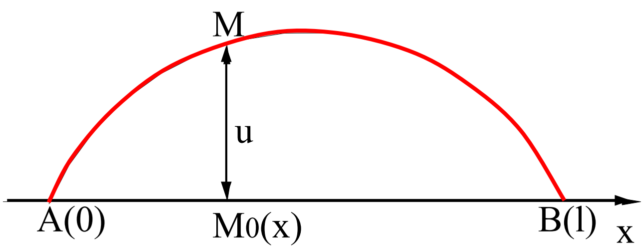


Fig.1

Fie M un punct al coardei şi $M_0(x)$ poziţia de repaus a acestui punct. Se presupune că orice punct M al coardei în vibraţie se mişcă într-un plan perpendicular pe Ox.

Distanţa M_0M o notăm cu u şi este funcţie de x şi de timpul t, u=u(x,t). Mişcarea coardei se consideră cunoscută dacă se cunoaşte această funcţie. Se arată că în absenţa unor forţe exterioare, funcţia u(x,t) verifică ecuaţia (1) (care se mai numeşte ecuaţia oscilaţiilor libere ale coardei).

Constanta c^2 are expresia $c^2 = \frac{\rho}{T_0}$, de unde ρ este densitatea specifică liniară a coardei, iar T_0 tensiunea la care este supusă coarda în poziția de repaus.

Ecuația (1) se întâlneşte şi în probleme de propagarea undelor când c^2 are altă semnificație.

Problema pentru coarda infinită constă în următoarele: să se determine funcția $u(x,t)\in C^2(\Omega)$, $\Omega=[0,l]\times R_+$ care să verifice ecuația (1) şi care satisface condițiile inițiale:

(2) $$u(x,0) = f(x), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = g(x), \quad x \in [0.l]$$

unde f admite derivată de ordinul al doilea iar g admite derivată de ordinul întâi pe [0,l].

Egalitatea u(x,0)=f(x) ne dă poziția inițială a fiecărui punct M de pe coardă iar $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = g(x), \quad x \in [0.l]$ viteza inițială pentru fiecare punct al coardei.

Ecuația (1) este de tip hiperbolic $\left(\delta = \frac{1}{c^2} > 0\right)$. Ecuația caracteristică:

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 - \frac{1}{c^2} = 0,$$

se descompune în două ecuații diferențiale:

$$dx-cdt=0 \text{ şi } dx+cdt=0.$$

Soluțiile generale (două familii de curbe caracteristice):

$$x-ct=C_1 \text{ şi } x+ct=C_2 .$$

Cu ajutorul schimbării de variabile

$$\begin{cases} \xi = x - ct \\ \eta = x + ct \end{cases}$$

obținem pentru (1) forma canonică: $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0$.

Soluția generală a acestei ecuații este:

$$u = \varphi(\xi)+\psi(\eta),$$

sau prin înlocuirea lui ξ şi η obtinem soluția generală a ecuației (1) de forma:

(3) $u(x,t)=\varphi(x-ct)+\psi(x+ct)$.

Vom determina aceste funcții astfel ca u(x,t) să satisfacă condițiile (2). Avem:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-c\varphi'(x-ct)+c\Psi'(x+ct)$$

şi cele două condiții din (2) dau :

$$\begin{cases}\varphi(x)+\Psi(x)=f(x)\\ \varphi'(x)+\Psi'(x)=-\frac{1}{c}g(x)\end{cases}$$

sau integrând în a doua egalitate,

$$\begin{cases}\varphi(x)+\Psi(x)=f(x)\\ \varphi(x)-\Psi(x)=-\frac{1}{c}\int\limits_{x_0}^{x}g(\tau)d\tau\end{cases},$$

unde x_0 este o constantă arbitrară $x_0\in[0.1]$. De aici rezultă:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}\left[f(x)-\frac{1}{c}\int\limits_{x_0}^{x}g(\tau)d\tau\right] \text{ și } \Psi(x)=\frac{1}{2}\left[f(x)-\frac{1}{c}\int\limits_{x_0}^{x}g(\tau)d\tau\right]$$

de unde deducem

$$(4)\qquad \begin{cases}\varphi(x-ct)=\frac{1}{2}\left[f(x-ct)-\frac{1}{c}\int\limits_{x_0}^{x-ct}g(\tau)d\tau\right]\\ \Psi(x+ct)=\frac{1}{2}\left[f(x+ct)-\frac{1}{c}\int\limits_{x_0}^{x+ct}g(\tau)d\tau\right]\end{cases}.$$

Înlocuind (4) în (3) obținem:

$$(5)\qquad u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x-ct)+f(x+ct)\right]+\frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct}g(\tau)d\tau\ .$$

Observăm că u(x,t) din (5) verifică condițiile (2).

În ipotezele admise pentru f şi g, funcția (5) verifică şi ecuația (1). Se poate arăta că soluția este unică.

Metoda prin care am obținut această soluție se numeşte *metoda schimbării variabilelor* sau *metoda D'Alembert şi Euler*.

Formula (5) este formula lui d'Alembert.

Exemplu: Să presupunem coarda infinită în ambele sensuri şi că în momentul inițial are poziția dată de:

$$u(x,0)=\begin{cases} f(x), & ,x\in[0,1] \\ 0 & ,x\in R\setminus[0,1] \end{cases}$$

iar viteza inițială este nulă, pentru orice punct al coardei $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0}=0$. Mişcarea coardei este caracterizată de : $u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x-ct)+f(x+ct)]$.

Observăm că f(x-ct)≠0 numai pentru $0\le x-ct\le 1$ adică pentru $ct\le x\le 1+ct$. Graficul acestei funcții se obține din graficul funcției f(x) prin translația de modul ct în direcția şi sensul axei Ox. De asemenea, graficul funcției f(x+ct) se obține din graficul funcției f(x) prin translația –ct, care se face în sens opus.

Acest rezultat are următoarea interpretare: perturbarea inițială a coardei pe un interval [0,l] se propagă de-a lungul coardei în ambele sensuri prin două unde, una directă cu viteza c, alta inversă cu viteza –c.

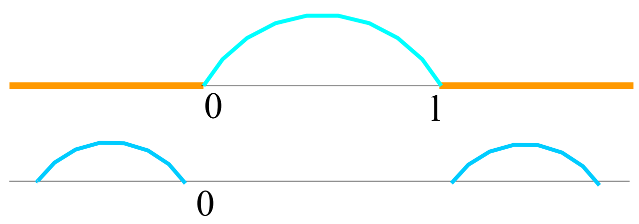


Fig.2

Inițial cele două unde sunt suprapuse, apoi se despart şi se îndepărtează una de alta, mergând în sensuri opuse (fig.2).

5. Coarda finită. Metoda separării variabilelor (D. Bernoulli şi Fourier).

În exemplul studiat anterior al coardei infinite au fost date numai condiții inițiale. Vom considera o coardă finită de lungime l care în poziția de echilibru este situată pe axa Ox, având un capăt în origine şi celălalt capăt în punctul A(l).(fig.1).

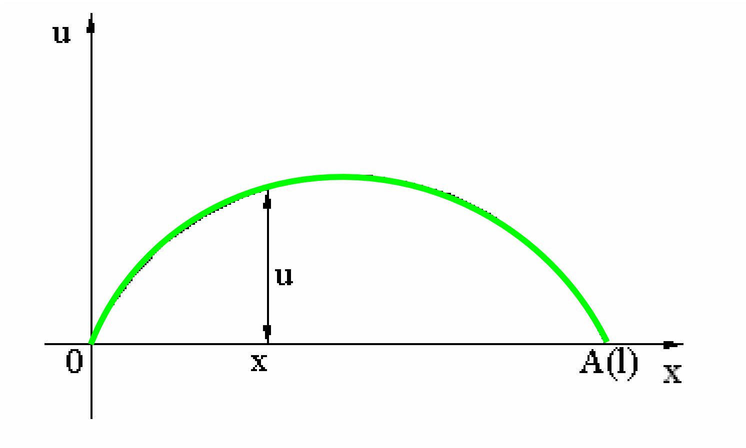


Fig.1

Asupra coardei nu acționează forțe exterioare. Coarda în acest caz execută vibrații libere, având astfel ecuația:

(1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad x \in [0,l], t \geq 0$$

cu condițiile inițiale:

(2) $$u(x,0) = f(x), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = g(x), \quad x \in [0,l]$$

precum şi condițiile la limită:

(3) $u(0,t)=0$, $u(l,t)=0$, $t \geq 0$.

Problema pentru coarda finită constă în următoarele: să se determine funcția $u(x,t) \in C^2(\Delta)$, $\Delta=[0,l]\times R_+$ care să verifice condițiile (2) şi (3). Pentru compatibilitatea condițiilor (2) şi (3) trebuie să avem $f(0)=f(l)=0$ şi $g(0)=g(l)=0$.

Pentru rezolvarea problemei puse vom folosi metoda Fourier sau metoda separării variabilelor.

Aceasta constă în a căuta pentru ecuația (1) soluții de forma:

(1) $u(x,t)=X(x)T(t)$

care verifică (2) şi (3).

Derivăm şi introducem în (1):

$$X''(x)\cdot T(t)=\frac{1}{c^2}X(x)\cdot T''(t).$$

Eliminând soluția banală u(x,t)=0 putem împărți cu X(x) T(t) şi variabilele se separă:

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)}=k.$$

Valoarea comună a acestor două rapoarte este constantă. În caz contrar între cele două variabile x şi t am avea o relație (x şi t nu ar mai fi independente).

Avem de integrat ecuațiile:

(5) $X''(x)-kX(x)=0$

şi

(6) $T''(t)-kc^2\cdot T(t)=0$.

Valorile constantei k vor fi precizate prin condițiile la limită.

Funcția (4) verifică relațiile (2) şi (3) dacă şi numai dacă:

(7) $X(0)=0,\ X(l)=0$

(astfel T(t)=0 care conduce la soluția banală).

Se pune problema de a detrermina valorile lui k astfel ca ecuația (5) să admită soluții nebanale care verifică (7) (problema Sturm-Liouville).

<u>Cazul 1^0</u> k>0. Ecuația caracteristică a ecuației (5) este $r^2-k=0$ care are rădăcini reale şi distincte $r_{1,2}=\pm\sqrt{k}$. Soluția generală a ecuației (5) este:

$$X(x)=C_1e^{\sqrt{k}x}+C_2e^{-\sqrt{k}x}$$

Condițiile (7) dau:

$$C_1+C_2=0,\ C_1e^{\sqrt{k}l}+C_2e^{-\sqrt{k}l}=0\ ,$$

cu soluția $C_1=C_2=0$. Obținem soluția banală care nu convine.

Cazul 2^0. $k=0$. Soluția generală a ecuației (5) este $X(x)=C_1x+C_2$. În acest caz condițiile la limită (7) dau $C_2=0$, $C_1l+C_2=0$. Rezultă $C_1=C_2=0$ şi obținem din nou soluția banală.

Cazul 3^0. $k<0$. Notăm $k=-\lambda^2$, $\lambda>0$. Rădăcinile ecuației carcacteristice sunt $r_{1,2}=\pm i\lambda$ iar soluția generală a ecuației (5) este de forma: $X(x) = C_1\cos\lambda x + C_2\sin\lambda x$.

Condițiile la limită dau: $C_1=0$, $C_2\sin\lambda l=0$.

Pentru a nu obține din nou soluția banală, vom lua $C_1=0$, $C_2\neq0$, $\sin \lambda l=0$. Rezultă:

$$\lambda = n\frac{\pi}{l},\ \ n \in \{1,2,...\}.$$

Valorile proprii ale problemei sunt (cele care dau valori nebanale):

$$k_n = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\ n \in \{1,2,...\}.$$

iar funcțiile proprii, în afara unui factor lipsit de importanță, au expresiile:

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Deoarece valorile constantei k sunt precizate, ecuația (6) devine:

$$T''(t) + \left(\frac{n\pi c}{l}\right)^2 T(t) = 0.$$

Soluția generală a acestei ecuații este:

$$T_n(t) = A_n\cos\frac{n\pi ct}{l} + B_n\sin\frac{n\pi ct}{l},\ n \in \{1,2,...\}.$$

Funcțiile de forma (4) care verifică ecuația (1) şi condițiile la limită (3) sunt:

$$u_n(x,t) = X_n(x)\cdot T_n(t)$$

adică,

$$(8)\quad u_n(x,t) = \left(A_n\cos\frac{n\pi ct}{l} + B_n\sin\frac{n\pi ct}{l}\right)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l},\qquad n \in \{1,2,...\}.$$

Conform principiului suprapunerii efectelor , căutăm o soluție u(x,t) de forma:

(9) $$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)$$

despre care presupunem că este convergentă şi că poate fi derivată termen cu termen de două ori în raport cu x şi de două ori în rapot cu t:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}.$$

Se observă uşor că funcţiile u(x,t) din (8) verifică ecuaţia (1) deoarece $u_n(x,t)$ este soluţie a acestei ecuaţii. Funcţia u(x,t) din (8) , verifică şi condiţiile la limită. Constantele A_n şi B_n le determinăm impunând ca u(x,t) din (8) să verifice şi condiţiile iniţiale.

Avem:

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi c}{l}B_n\sin\frac{n\pi x}{l}\quad .$$

Folosind condiţiile (2) obţinem:

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{l}=f(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi c}{l}B_n\sin\frac{n\pi x}{l}=g(x)\,.$$

Vom presupune că funcţiile f(x) şi g(x) îndeplinesc condiţiile lui Dirichlet, deci pot fi dezvoltate în serie numai de sinusuri pe intervalul (0,l). Perioada prelungirilor acestor funcţii este T=2l. Avem:

(10) $$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\quad B_n=\frac{2}{n\pi c}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\quad .$$

Soluţia problemei (2) este (9) cu coeficienţii (10).

Observaţie Funcţia $u_n(x,t)$ verificând ecuaţia (1) cu condiţiile la limită (3), caracterizează o oscilaţie proprie a coardei. Această oscilaţie are perioada $\tau_n=\frac{2\pi}{\omega_n}=\frac{2l}{nc}$ şi amplitudinea $\sqrt{A_n^2+B_n^2}\cdot\left|\sin\frac{n\pi x}{l}\right|$.

Înălţimea sunetului datorit unei oscilaţii este cu atât mai mare cu cât perioada este mai mică, iar intensitatea sunetului este cu atât mai mare cu cât

amplitudinea vibrației este mai mare. Fiecare oscilație proprie a coardei corespunde unui ton simplu al coardei. Egalitatea (8) arată că sunetul emis de coardă în vibrație este o suprapunere de tonuri simple.

Ştim că A_n şi B_n formează un şir strict descrescător. Amplitudinea oscilației caracterizată prin $u_n(x,t)$ descreşte când n creşte. Tonul fundamental care are intensitatea cea mai mare, deci va corespunde oscilației $u_1(x,t)$. Celelalte tonuri simple care au intensitatea mai mică şi înălțimea mai mare, prin suprapunerea lor peste tonul fundamental dau timbrul sunetului.

6. Ecuații de tip eliptic.Formularea problemelor la limită.Soluții particulare ale ecuației lui Laplace.

Dintre ecuațiile de tip eliptic cele mai des întâlnite sunt:

(1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$ (($\Delta u = 0$) – ecuația lui Laplace (1749-1827))

şi

(2) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\mathrm{f}(x,y,z)$$ (ecuația lui Poisson (1781-1840))

Ecuațiile de tip eliptic intervin în studiul problemelor de teoria potențialului şi în studiul fenomenelor staționare (fenomene ce nu depind de timpul t). Astfel temperatura u(x,y,z) a unui câmp *termic staționar* verifică ecuația (1) , iar dacă există surse de căldură ea verifică ecuația lui Poisson (2) unde $f=-\frac{F}{k}$, F densitatea surselor de căldură şi k coeficient de conductibilitate termică.

Întrucât cu ajutorul ecuațiilor de tip eliptic se studiază fenomene ce nu depind de variabila t la aceste ecuații nu se impun condiții inițiale ci doar condiții de limită.

Pentru a afla funcția u(x,y,z) a unui câmp *termic staționar* ecuației (1) respectiv (2) i se impun una din următoarele condiții la limită:

1). Se dau valorile temperaturii u(x,y,z) în punctele unei suprafețe S care este frontiera domeniului $D \subset R^3$ în care se studiază fenomenul, adică se impune condiția: p_1) $u(x,y,z)\big|_S = f_1$ (f_1 continuă dată).

2). Se dă fluxul de căldură prin suprafața S care este frontiera domeniului $D \subset R^3$ în care se studiază fenomenul , dat prin: p_2) $\left.\frac{du}{dn}\right|_S = f_2$, ($f_2$ continuă dată) unde

$\frac{du}{dn}$ este derivata funcției scalare u(x,y,z) după direcția vectorului

$\vec{n} = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \cos\beta \cdot \vec{j} + \cos\gamma \cdot \vec{k}$ cu $\left|\vec{n}\right| = 1$, $\alpha = \sphericalangle(\vec{n}, Ox), \beta = \sphericalangle(\vec{n}, Oy), \gamma = \sphericalangle(\vec{n}, Oz)$,

$\frac{du}{dn} = \frac{du}{dx}\cos\alpha + \frac{du}{dy}\cos\beta + \frac{du}{dz}\cos\gamma.$

3). Se dă schimbul de căldură prin suprafața S între corpul delimitat de suprafața S în care se studiază fenomenul şi mediul înconjurător a cărui temperatură se cunoaste prin:

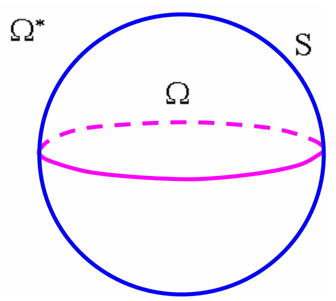
p_3) $u \cdot \cos\alpha + \frac{du}{dn}\cos\beta = f_3$ (funcție continuă dată).

Condiția p_1) se mai numeşte *prima* condiție la limită, sau prima problemă la limită pentru ecuația (1) sau (2) sau problema *Dirichlet*.

Condiția p_2) se mai numeşte *a doua* condiție la limită pentru ecuația (1) sau (2) şi se numeşte problema lui *Neumann*(1903-1957–matematician de origine maghiară) .

Condiția p_3) se numeşte *a treia* condiție la limită pentru ecuația (1) sau (2) şi se vede că este o combiație dintre p_1) şi p_2).

Dacă se cere funcția u(x,y,z) care verifică ecuția (1) sau (2) cu una din cele trei condiții la limită, în interirorul domeniului Ω (se cere u în int Ω) avem de a face cu *problema exterioară* corespunzătoare.



Să enunțăm primele două probleme interioare şi exterioare:

I). *Problema lui Dirichlet interioară* relativă la domeniul Ω şi ecuația (1) . Să se afle funcția u(x,y,z)

ce verifică condițiile: a) $u\in C(\overline{\Omega})$; b) $u\in C^2(\Omega)$; c) $\Delta u=0$; d) $u\big|_S=f$.

II). *Problema lui Dirichlet exterioară* relativă la domeniul Ω şi ecuația (1) . Să se afle funcția u(x,y,z) ce verifică condițiile: a) $u\in C(\overline{\Omega^*})$; b) $u\in C^2(\Omega^*)$; c) $\Delta u=0$; d) $u\big|_S=f$.

III). *Problema lui Neumann interioară* relativă la domeniul Ω şi ecuația (1). Să se afle funcția u(x,y,z) ce verifică condițiile: a) , b) , c) din I) şi d) $\left.\frac{du}{dn}\right|_s = f$.

IV). *Problema lui Neumann exterioară* relativă la domeniul $\Omega_$ şi ecuația (1). Să se afle funcția u(x,y,z) ce verifică condițiile: a) , b) , c) din II) şi d) $\left.\frac{du}{dn}\right|_s = f$

(f în toate cele patru probleme , funcție continuă dată).

<u>Soluții particulare ale ecuației lui Laplace.</u>

Prezintă interes soluțiile cu simetrie *sferică* respectiv cu simetrie *cilindrică* ale ecuației lui Laplace.

1). O soluție a ecuației lui Laplace se numeşte *simetrie sferică* dacă este o soluție a ecuației lui Laplace care depinde numai de distanța de la un punct oarecare din spațiu la un punct fix . Astfel se ştie că potențialul câmpului creat de o sarcină electrică punctiformă, depinde numai de distanța de la un punct oarecare în spațiu în care se măsoară câmpul la punctul în care este aşezată sarcina electrică punctiformă.

Fie O(0,0,0) şi M(x,y,z); d(M,O)=$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=r.$

Vom căuta pentru ecuația lui Laplace $\Delta u=0$, soluții de forma u=f(r). Observăm că trebuie să avem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0.$$

Dar:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{x^2}{r^2}\cdot f''(r)+\frac{r^2-x^2}{r^3}\cdot f'(r),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{y^2}{r^2}\cdot f''(r)+\frac{r^2-y^2}{r^3}\cdot f'(r) \text{ şi}$$

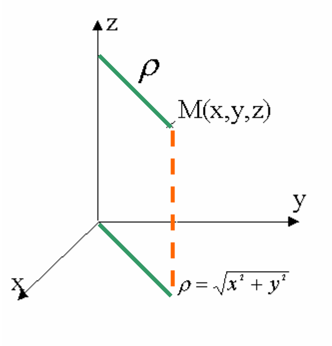
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{z^2}{r^2}\cdot f''(r)+\frac{r^2-z^2}{r^3}\cdot f'(r).$$

Prin înlocuirea şi efectuarea calculelor obţinem ecuaţia diferenţială: $f''(r)+\frac{2}{r}\cdot f'(r)=0$ sau $\frac{f''(r)}{f'(r)}=-\frac{2}{r}$, de unde, prin integrare: ln f'(r)=–2ln r+ln c_1 şi $f'(r)=\frac{c_1}{r^2}$. Rezultă $f(r)=-\frac{c_1}{r}+c_2$. Luând c_1= -1 şi c_2=0 obţinem u=f(r)=$\frac{1}{r}$ care este o soluţie cu simetrie sferică a ecuaţiei lui Laplace ; prezintă interes practic întrucât cu aproximaţia unui factor constant ea ne dă potenţialul câmpului creat de o sarcină electrică punctiormă.

2) O soluţie a ecuaţiei lui Laplace se zice cu *simetrie cilindrică* dacă depinde numai de distanţa de la un punct oarecare din spaţiu la o axă din spaţiu. Câmpul electric creat de o linie electrică *încărcată* depinde numai de distanţa de la un punct din spaţiu în care se măsoară câmpul până la linia încărcată respectivă. Să presupunem că axa fixă din spaţiu este axa Oz.

Atunci d(M,Oz)=$\sqrt{x^2+y^2}$.

Ne propunem să aflăm soluţii de forma u=f(ρ) pentru Δu=0.



Δu=0 ⇒Δf(ρ)=0 ⇔$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0.$

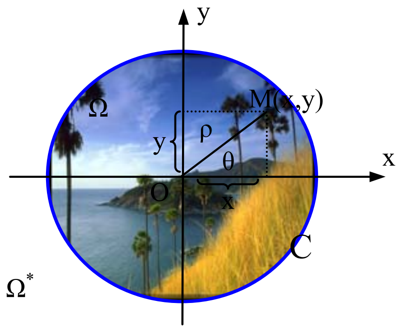
Dar:

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{x^2}{\rho^2}\cdot f''(\rho)+\frac{\rho^2-x^2}{\rho^3}\cdot f'(\rho)\\ \text{şi}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{y^2}{\rho^2}\cdot f''(\rho)+\frac{\rho^2-y^2}{\rho^3}\cdot f'(\rho)\end{cases}.$$

Înlocuind obţinem: $f''(\rho)+\frac{1}{\rho}\cdot f'(\rho)=0$ cu soluţia f(ρ)=$c_1$ln ρ+c_2. Luând c_1= -1,c_2= 0 obţinem u=f(ρ)=ln$\frac{1}{\rho}$ care prezintă interes teoretic deoarece cu ajutorul ei se pot obţine alte ecuaţii Laplace şi prezintă interes practic deoarece cu

aproximația unui factor constant ea ne dă mărimea câmpului creat de o linie electrică încărcată.

7. Problema lui Dirichlet* pentru cerc . Formula lui Poisson.



Trebuie să aflăm funcția u(x,y) care verifică ecuația lui Laplace:

(1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

cu condiția:

(2) $u\big|_c=f$, (f continuă dată).

Pentru problema *interioară* soluția u trebuie să fie mărginită *în origine*, iar pentru problema *exterioară* soluția u trebuie să fie mărginită la *infinit*. Pentru a impune mai uşor condiția la limită (2), vom trece la coordonate polare:

(3) $\begin{cases} x=\rho\cdot\cos\theta \\ y=\rho\cdot\sin\theta \end{cases}$ $\Rightarrow$ (3') $\begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2} \\ \theta=arctg\dfrac{y}{x}+k\pi \end{cases}$ unde k=0 dacă $M\in I$, k=1 dacă $M\in II$ sau III, k=2 dacă $M\in IV$. Observăm că: $\frac{\partial\rho}{\partial x}=\frac{x}{\rho}$, $\frac{\partial\rho}{\partial y}=\frac{y}{\rho}$, $\frac{\partial\theta}{\partial x}=-\frac{y}{\rho^2}$, $\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{x}{\rho^2}$.

Obținem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\cdot\dfrac{\partial\rho}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\cdot\dfrac{\partial\theta}{\partial x}=\dfrac{x}{\rho}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial\rho}-\dfrac{y}{\rho^2}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial\theta} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\cdot\dfrac{\partial\rho}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\cdot\dfrac{\partial\theta}{\partial y}=\dfrac{y}{\rho}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial\rho}+\dfrac{x}{\rho^2}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial\theta} \end{cases}$$

* Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859)-matematician german.

Calculăm apoi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\cdot\left(\frac{x}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial \rho}-\frac{y}{\rho^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)=$$

$$=\frac{\rho-x\cdot\frac{\partial\rho}{\partial x}}{\rho^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{x}{\rho}\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\cdot\partial\theta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)+\frac{2y\rho\cdot\frac{\partial\rho}{\partial x}}{\rho^4}\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta}-\frac{y}{\rho^2}\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\cdot\partial\theta}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)$$

de unde după înlocuirea $\frac{\partial\theta}{\partial x}$ şi $\frac{\partial\rho}{\partial x}$ şi efectuarea calculelor obţinem:

(4) $$\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{x^2}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}-\frac{2xy}{\rho^3}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\cdot\partial\theta}+\frac{y^2}{\rho^4}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{\rho^2-x^2}{\rho^3}\cdot\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{2xy}{\rho^4}\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta}.\right.$$

În mod analog găsim:

(5) $$\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{y^2}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{2xy}{\rho^3}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\cdot\partial\theta}+\frac{x^2}{\rho^4}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{\rho^2-y^2}{\rho^3}\cdot\frac{\partial u}{\partial\rho}-\frac{2xy}{\rho^4}\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta}.\right.$$

Înlocuim (4) şi (5) în ecuaţia (1), obţinem:

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{x^2+y^2}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{x^2+y^2}{\rho^4}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{2\rho^2-(x^2+y^2)}{\rho^3}\cdot\frac{\partial u}{\partial\rho}=0$$

sau

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial\rho}=0\ \Big|\cdot\rho^2\Rightarrow$$

(6) $$\rho^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\rho\cdot\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0$$

cu condiţia la limită

(7) $u\big|_{\rho=a}=f.$

Pentru rezolvarea problemei (6),(7) vom folosi metoda separării variabilelor.

Căutăm o soluţie de forma:

(8) $u(\rho,\theta)=R(\rho)\cdot T(\theta).$

Obsevăm că:

$\frac{\partial u}{\partial\rho}=R'(\rho)\cdot T(\theta)$ şi $\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}=R''(\rho)\cdot T(\theta)$, iar $\frac{\partial u}{\partial\theta}=R(\rho)\cdot T'(\theta)$ şi $\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=R(\rho)\cdot T''(\theta).$

Înlocuind în (6) obţinem:

$$\rho^2\cdot R''(\rho)\cdot T(\theta)+\rho\cdot R'(\rho)\cdot T(\theta)+R(\rho)\cdot T''(\theta)=0$$

de unde prin împărțire la $R(\rho)\cdot T(\theta)\neq 0$ obținem:

(9) $$\rho^2\cdot\frac{R''(\rho)}{R(\rho)}+\rho\cdot\frac{R'(\rho)}{R(\rho)}=-\frac{T''(\theta)}{T(\theta)}\ .$$

Membrul stâng al ecuației (9) fiind o funcție numai de ρ, iar membrul drept fiind o funcție numai de θ, egalitatea lor este posibilă pentru orice ρ şi orice θ,numai dacă cei doi membrii au aceaşii valoare constantă pe care o notăm cu λ; obținem din (9) următoarele ecuații:

(10) $T''(\theta)+\lambda\cdot T(\theta)=0$

şi

(11) $\rho^2\cdot R''(\rho)+\rho\cdot R'(\rho)-\lambda\cdot R(\rho)=0$.

Funcția căutată ca soluție $u(\rho,\theta)$ trebuie să fie periodică în raport cu θ cu perioada 2π, adică să avem: $u(\rho,\theta+2\pi)=u(\rho,\theta)$, deoarece u trebuie să aibă aceeaşi valoare în acelaşi punct. Pentru aceasta $T(\theta)$ trebuie să fie periodică cu perioada 2π. Avem, deci de găsit valorile parametrului real λ, pentru care ecuația (10) are soluții nebanale, periodice cu perioada 2π. Ecuația (10) este o ecuație diferențială liniară omogenă cu coeficienți constanți cu ecuația caracteristică :

$r^2+\lambda=0\Rightarrow r_{1,2}=\pm\sqrt{-\lambda}$

<u>Cazul I</u>. λ=0. Avem $r_1=r_2=0$ şi $T(\theta)=A\cdot 1+B\cdot\theta$. Vom determina A şi B astfel încât $T(\theta)$ să fie periodică cu perioada 2π,

adică: $T(\theta+2\pi)=T(\theta)\Rightarrow A+B\cdot(\theta+2\pi)=A+B\cdot\theta\Rightarrow B=0\Rightarrow T(\theta)=A$ −constant o soluție banală inacceptabilă.

<u>Cazul II</u>. λ<0. Găsim $T(\theta)=A\cdot e^{\theta\cdot\sqrt{-\lambda}}+B\cdot e^{-\theta\cdot\sqrt{-\lambda}}$ care este o soluție exponențială reală şi ca atare nu este periodică.

<u>Cazul III</u>. λ>0. Ecuația caracteristică are rădăcinile complexe conjugate $r_{1,2}=\pm\sqrt{-\lambda}=\pm i\sqrt{\lambda}$, deci $\{\cos(\theta\sqrt{\lambda}),\sin(\theta\sqrt{\lambda})\}$ este un sistem fundamental de soluții pentru ecuația (10), iar soluția generală este:

$$T(\theta)=A\cdot\cos(\theta\sqrt{\lambda})+B\cdot\sin(\theta\sqrt{\lambda}).$$

Determinăm A şi B astfel încât: $T(\theta+2\pi)=T(\theta)$.

Dar: $T(\theta+2\pi)=A\cdot\cos(\theta+2\pi)\sqrt{\lambda}+B\cdot\sin(\theta+2\pi)\sqrt{\lambda}$. Ținând seama de faptul că perioada este 2π rezultă că: $(\theta+2\pi)\sqrt{\lambda}-\theta\sqrt{\lambda}=2n\pi$ sau $2\pi\sqrt{\lambda}=2n\pi$ de unde:

(12) $\lambda_n=n^2,\quad n=0,1,2,...$

Deci soluția generală a ecuației (10) este:

(13) $T_n(\theta)=A_n\cdot\cos n\theta+B_n\cdot\sin n\theta,\quad n=0,1,2,...$

Cu valorile proprii (12) găsite, ecuația (11) devine:

(11′) $\rho^2\cdot R''(\rho)+\rho\cdot R'(\rho)-n^2\cdot R(\rho)=0$

care este o ecuație de tip Euler.

Pentru integrarea ecuației (11′) vom folosi schimbarea de varibilă $\rho=e^t$.

Obținem succesiv: $t=\ln\rho,\ \frac{dt}{d\rho}=\frac{1}{\rho}=e^{-t},\ R'(\rho)=\frac{dR}{d\rho}=\frac{dR}{dt}\cdot\frac{dt}{d\rho}=e^{-t}\cdot\frac{dR}{dt}$ și

$R''(\rho)=\frac{d^2R}{d\rho^2}=\frac{d}{d\rho}\cdot\left(\frac{dR}{d\rho}\right)=\frac{d}{dt}\cdot\left(e^{-t}\cdot\frac{dR}{dt}\right)\cdot\frac{dt}{d\rho}=\left(-e^{-t}\cdot\frac{dR}{dt}+e^{-t}\cdot\frac{d^2R}{dt^2}\right)\cdot e^{-t}$ de unde

$R''(\rho)=e^{-2t}\cdot\left(\frac{d^2R}{dt^2}-\frac{dR}{dt}\right)$. Înlocuind $R'(\rho)$ și $R''(\rho)$ ecuația (11′) devine:

$\frac{d^2R}{dt^2}-n^2R=0$ care este o ecuație diferențială liniară omogenă cu coeficienți constanți având ecuația caracteristică $r^2-n^2=0$ cu rădăcinile $r_{1,2}=\pm n$ și deci soluția generală: $R_n=C_ne^{nt}+D_ne^{-nt}$ sau :

(14) $R_n(\rho)=C_n\cdot\rho^n+D_n\cdot\rho^{-n}$.

Pentru problema lui Dirichlet *interioară* trebuie să luăm $D_n=0$ deoarece în caz contrar $\rho^{-n}=\frac{1}{\rho^n}\to\infty$ pentru $\rho\to 0$ și soluția u nu ar fi mărginită în origine.

Pentru problema lui Dirichlet *exterioară* trebuie să luăm $C_n=0$, în caz contrar $\rho^n\to\infty$ pentru $\rho\to\infty$ și soluția n-ar fi mărginită la ∞. Deci am găsit:

(14_i) $R_n(\rho)=C_n\cdot\rho^n\ \ dacă\ \ \rho\le a$ (i-interioară)

și

(14_e) $R_n(\rho)=D_n\cdot\rho^{-n}\ \ dacă\ \ \rho\ge a$ (e-exterioară).

Am găsit astfel pentru ecuația (6) soluțiile:

(15_i) $u_n(\rho,\theta)=R_n(\rho)\cdot T_n(\theta)=\rho^n\cdot\left(\overline{A_n}\cdot\cos n\theta+\overline{B_n}\cdot\sin n\theta\right)$pentru ρ≤ a unde $\overline{A_n}=A_n\cdot C_n$ şi $\overline{A_n}=B_n\cdot C_n$ şi

(15_e) $u_n(\rho,\theta)=R_n(\rho)\cdot T_n(\theta)=\rho^{-n}\cdot\left(A_n^*\cdot\cos n\theta+B_n^*\cdot\sin n\theta\right)$ pentru ρ≥ a unde $A^*{}_n=A_n\cdot D_n$ şi $B^*{}_n=B_n\cdot D_n$.

Conform principiului suprapunerii efectelor, căutăm o soluție de forma:

(16_i) $$u(\rho,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\cdot\left(\overline{A_n}\cdot\cos n\theta+\overline{B_n}\cdot\sin n\theta\right), dacă\ \ \rho\le a \text{ şi}$$

(16_e) $$u(\rho,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{-n}\cdot\left(A_n^*\cdot\cos n\theta+B_n^*\cdot\sin n\theta\right), dacă\ \ \rho\ge a\,.$$

Vom determina coeficinții $\overline{\text{A}}$ n, $\overline{\text{B}}$n, A_n^*, B_n^* astfel încât soluția (16_i) respectiv(16_e) să verifice condiția $u|_{\rho=a}$=f.

Făcând în (16_i) şi (16_e) pe ρ=a şi ținând seama că $u|_{\rho=a}$=f, obținem:

(17_i) $$u(a,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n\cdot\left(\overline{A_n}\cdot\cos n\theta+\overline{B_n}\cdot\sin n\theta\right)=\text{f}, dacă\ \ \rho\le a$$

şi

(17_e) $$u(a,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}a^{-n}\cdot\left(A_n^*\cdot\cos n\theta+B_n^*\cdot\sin n\theta\right)=\text{f}, dacă\ \ \rho\ge a\,.$$

În (17_i) şi (17_e) avem dezvoltările în serie ale funcției f, în serie Fourier trigonometrică, periodică de perioadă 2π, coeficienții acestor dezvoltări îi obținem astfel:

$$\begin{cases} a^n\cdot\overline{A_n}=\dfrac{1}{\pi}\cdot\displaystyle\int_0^{2\pi}f(t)\cdot\cos nt\cdot dt \\ a^n\cdot\overline{B_n}=\dfrac{1}{\pi}\cdot\displaystyle\int_0^{2\pi}f(t)\cdot\sin nt\cdot dt \end{cases},$$

de unde:

(18_i) $$\begin{cases} \overline{A_n}=\dfrac{1}{\pi\cdot a^n}\cdot\displaystyle\int_0^{2\pi}f(t)\cdot\cos nt\cdot dt \\ \overline{B_n}=\dfrac{1}{\pi\cdot a^n}\cdot\displaystyle\int_0^{2\pi}f(t)\cdot\sin nt\cdot dt \end{cases} \quad n\in\{1,2,3...\} \text{ şi } \overline{A_0}=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}f(t)\cdot dt\,.$$

Dacă înlocuim (18_i) în (16_i) obținem:

$$u(\rho,\theta)=\frac{1}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho^n}{a^n}\cdot\left(\int_0^{2\pi}f(t)\cdot\cos nt\cdot\cos n\theta\cdot dt+\int_0^{2\pi}f(t)\cdot\sin nt\cdot\sin n\theta\cdot dt\right)+\overline{A_0}$$

sau

$$u(\rho,\theta)=\overline{A_0}+\frac{1}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n\cdot\int_0^{2\pi}f(t)\cdot\cos n(t-\theta)\cdot dt$$

care mai poate fi scrisă şi astfel:

$$(19)\qquad u(\rho,\theta)=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}f(t)\cdot\left[1+2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n\cdot\cos n(t-\theta)\right]\cdot dt\qquad\left(0<\frac{\rho}{a}<1\right).$$

Suma seriei care figurează sub semnul de integrare din relaţia (19) poate fi calculată pornind de la identitatea:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n\cdot\cos n(t-\theta)+i\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n\cdot\sin n(t-\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n\cdot e^{in(t-\theta)}.$$

Seria $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n\cdot e^{in(t-\theta)}$ este o serie geometrică, convergentă pentru $\frac{\rho}{a}<1$ (condiţie îndeplinită) şi având suma:

$$S=\frac{\frac{\rho}{a}\cdot e^{i(t-\theta)}}{1-\frac{\rho}{a}\cdot e^{i(t-\theta)}}=\frac{\rho}{a\cdot e^{-i(t-\theta)}-\rho}=\frac{\rho[a\cdot\cos(t-\theta)-\rho+i\cdot a\cdot\sin(t-\theta)]}{a^2-2a\rho\cdot\cos(t-\theta)+\rho^2}$$

deci:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n\cdot\cos n(t-\theta)=\frac{\rho[a\cdot\cos(t-\theta)-\rho)]}{a^2-2a\rho\cdot\cos(t-\theta)+\rho^2}.$$

Cu aceasta relaţia (19) devine:

$$u(\rho,\theta)=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}f(t)\cdot\left\{1+\frac{2\rho[a\cdot\cos(t-\theta)-\rho)]}{a^2-2a\rho\cdot\cos(t-\theta)+\rho^2}\right\}\cdot dt$$

sau după efectuarea calculelor din paranteza $\{\dots\}$obţinem:

$$(20)\qquad u(\rho,\theta)=\frac{a^2-\rho^2}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\frac{f(t)\cdot dt}{a^2-2a\rho\cdot\cos(t-\theta)+\rho^2}.$$

Formula (20) se numeşte *formula lui Poisson*.

Funcţia $u(\rho,\theta)$ din (20) verifică ecuaţia (1) a lui Laplace şi condiţia la limită (2). Se poate arăta că îndeplineşte şi condiţia de a fi continuă pe $\Omega\cup C$ dacă f(t) este

continuă. <u>Funcția $u(\rho,\theta)$ din (20) este soluția problemei lui Dirichlet pentru interiorul cercului cu centrul în origine şi de rază a</u>.

Din (17_e) obținem în mod analog:

$$(21_e)\quad \begin{cases} A_n^* = \dfrac{a^n}{\pi}\cdot\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cdot\cos nt\cdot dt \\ B_n^* = \dfrac{a^n}{\pi}\cdot\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cdot\sin nt\cdot dt \end{cases} \quad n\in\{1,2,3,...\} \text{ şi } A_n^* = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi} f(t)\cdot dt$$

Procedând ca în problema Dirichlet interioară din relațiile (16_e), (17_e) şi (21_e) obținem în cele din urmă:

$$(22)\qquad u(\rho,\theta)=\frac{\rho^2-a^2}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\frac{f(t)\cdot dt}{a^2-2a\rho\cdot\cos(t-\theta)+\rho^2}\ .$$

Formula (22) se numeşte *formula lui Poisson*.

Funcția $u(\rho,\theta)$ din (22) verifică ecuația (1) a lui Laplace şi condiția la limită (2). Se poate arăta că îndeplineşte şi condiția de a fi continuă pe $\Omega^*\cup C$ dacă f(t) este continuă. <u>Funcția $u(\rho,\theta)$ din (22) este soluția soluția problemei lui Dirichlet pentru exteriorul cercului cu centrul în origine şi de rază a</u>.

8. Problema lui Neumann pentru interiorul cercului.

Să se determine funcția u astfel încât $\Delta u=0$, ($x^2+y^2=a^2$) şi $\left.\dfrac{du}{dn}\right|_C = f(\theta)$.

Procedând ca în cazul problemei Dirichlet se obține soluția (i):

$$u(\rho,\theta)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\cdot\left(A_n\cdot\cos n\theta+B_n\cdot\sin n\theta\right)$$

unde:

$$n\cdot a^{n-1}\cdot A_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{2\pi} f(t)\cdot\cos nt\cdot dt \text{ şi } n\cdot a^{n-1}\cdot B_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{2\pi} f(t)\cdot\sin nt\cdot dt\,,$$

după care însumarea se face imediat dacă ținem seama de agalitatea:

$$-2\cdot\sum_{n=1}^{\infty} q^n\cdot\frac{\cos n\alpha}{n}=\ln(1-2q\cdot\cos\alpha+q^2)$$

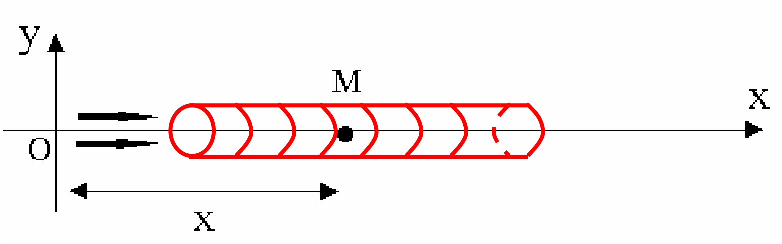
(A_0 ramâne nedeterminat). Soluția problemei Neumann pentru interiorul cercului $x^2+y^2<a^2$ şi condiția la limită $\left.\frac{du}{dn}\right|_{\rho=a}=f(\theta)$ este:

$$u(\rho,\theta)=A_0-\frac{a}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}f(t)\cdot\ln\frac{a^2-2a\rho\cdot\cos(t-\theta)+\rho^2}{a^2}\cdot dt\ .$$

Formula de mai sus se numeşte *formula lui Dini*.

9. Ecuația căldurii.

Să considerăm o bară rectilinie situată pe axa Ox şi să notăm cu u(x,t) temperatura în punctul M(x) al barei la momentul t.



În ipoteza că între suprafața barei şi mediul înconjurător nu există schimb de căldură, se arată că u(x,t) verifică ecuația:

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial t},$$

unde a^2 este o constantă pozitivă care depinde de natura materialului din care este făcută bara: $a^2=\frac{k}{c\cdot\rho}$, k-coeficientul de conductibilitate termică, c-este căldura specifică şi ρ-densitatea. Bara este presupusă omogenă şi izotropă.

Ecuația (1) se numeşte ecuația căldurii. În R^2 şi R^3 (1) are forma:

$$(1')\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}$$

şi respectiv:

$$(1'')\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}$$

Ne vom ocupa de ecuația (1) la care adăugăm condiția inițială:

(2) $u(x,0) = f(x), x \in R$

care precizează distribuția temperaturilor la momentul t=0.

Vom căuta soluții particulare ale ecuației (1) de forma:

(3) $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$.

Derivăm şi înlocuind în (1) obținem: $X''(x) \cdot T(t) = \frac{1}{a^2} \cdot X(x) \cdot T'(t)$.

Vom elimina soluția banală $u(x,t) \equiv 0$ şi prin împărțire la X(x)·T(t) obținem:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T'(t)}{T(t)} = k$$

(k-constantă, deorece x şi t sunt independente).

Obținem ecuațiile:

(4) $T'(t) - ka^2 \cdot T(t) = 0$

şi

(5) $X''(x) - k \cdot X(x) = 0$.

Din ecuația (4) obținem soluția generală:

$$T(t) = C \cdot e^{ka^2 t}, \text{ C-constantă.}$$

Se pot prezenta trei cazuri:

1) k>0. Când timpul t creşte, $|T(t)|$ creşte putând să depăşască orice valoare. Aceeaşi proprietate o va avea şi $|u(x,t)|$, oricare ar fi punctul M(x) al barei. Acest caz este inacceptabil din punct de vedere fizic.

2) k=0.Avem T(t)=C, temperatura în fiecare punct al barei nu depinde de timp. Şi acest caz este inacceptabil.

3) k<0. Notăm $k=-\lambda^2$, $\lambda>0$. Soluțiile generale ale ecuațiilor (4) şi (5) sunt:

$$X(x) = C_1 \cdot \cos \lambda x + C_2 \cdot \sin \lambda x \text{ şi } T(t) = C \cdot e^{-\lambda^2 a^2 t},$$

unde C_1, C_2, C sunt constante arbitrare.

Soluțiile (3) ale ecuației (1) sunt:

(6) $u(x,t,\lambda) = [A(\lambda) \cdot \cos \lambda x + B(\lambda) \cdot \sin \lambda x] \cdot e^{-\lambda^2 a^2 t}$

unde $A(\lambda)=C \cdot C_1$ şi $B(\lambda)=C \cdot C_2$.

Deoarece condițiile la limită lipsesc, toate valorile strict pozitive ale lui λ sunt îndreptățite.

Vom încerca să determinăm soluția problemei sub forma:

(7) $$u(x,t)=\int_0^{\infty} u(x,t,\lambda)\cdot d\lambda$$

care înlocuieşte seria din cazul când avem valori proprii şi funcții proprii.

Condiția inițială (2) dă:

$$\int_0^{\infty} u(x,0,\lambda)\cdot d\lambda = f(x)$$

sau, ținând seama de (6),

(8) $$\int_0^{\infty}\left[A(\lambda)\cdot\cos\lambda x + B(\lambda)\cdot\sin\lambda x\right]\cdot d\lambda = f(x).$$

În relația de mai sus, să considerăm pentru funcția f(x) reprezentarea ei printr-o integrală Fourier: $f(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{\infty} d\lambda\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cdot\cos\lambda(x-\tau)\cdot d\tau$.

Această egalitate se mai scrie:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{\infty}\left[\cos\lambda x\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cdot\cos\lambda\tau\cdot d\tau + \sin\lambda x\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cdot\sin\lambda\tau\cdot d\tau\right]\cdot d\lambda .$$

Comparând cu (8), observăm că:

$$A(\lambda)=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cdot\cos\lambda\tau\cdot d\tau,\ B(\lambda)=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cdot\sin\lambda\tau\cdot d\tau \quad .$$

Cu aceasta (6) devine:

(9) $$u(x,t,\lambda)=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cdot e^{-\lambda^2 a^2 t}\cdot\cos\lambda(x-\tau)\cdot d\tau .$$

Înlocuind relația (9) în relația (7) obținem:

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{\infty} d\lambda\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cdot e^{-\lambda^2 a^2 t}\cdot\cos\lambda(x-\tau)\cdot d\tau$$

sau, schimbând ordinea de integrare:

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cdot d\tau\cdot\int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t}\cdot\cos\lambda(x-\tau)\cdot d\lambda .$$

Integrala $\int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \cdot \cos\lambda(x-\tau)\cdot d\lambda = \frac{1}{2a}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{t}}\cdot e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2t}}, t>0$ (integrala Poisson) , şi soluția problemei se mai scrie:

(10) $$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cdot e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2t}}\cdot d\tau .$$

Această formulă se generalizează pentru R^2 şi R^3. Astfel, pentru R^3, $\Delta u=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}$ cu u(x,y,z,0)=f(x,y,z), M(x,y,z)$\in R^3$ soluția este:

(11) $$u(x,y,z,t)=\frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^3}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\eta,\zeta)\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}}\cdot d\xi\cdot d\eta\cdot d\zeta$$

în ipoteza că f(x,y,z) este continuă, mărginită şi absolut integrabilă.

10. Proprietății ale funcțiilor armonice. Prima formulă a lui Green. A doua formulă a lui Green.

Prima formulă a lui Green.

Fie u şi v două funcții cu derivate parțiale până la ordinul doi, continue într-un domeniu $D\subset R^3$. Notăm S=Fr(D). În aceste condiții avem:

(1) $$\iint_S u\cdot\frac{\partial v}{\partial n}\cdot ds=\iiint_D\left[u\cdot\Delta v+grad\,u\cdot grad\,v\right]\cdot d\omega ,$$

unde n este normala la suprafața S.

((1) este prima formulă a lui Green).

Pentru a justifica formula (1) vom scrie formula lui Gauss-Ostrogradschi pentru vectorul $\vec{a}=u\cdot grad\,v$:

$$\iint_S \vec{a}\cdot\vec{n}\cdot ds=\iiint_D div\,\vec{a}\cdot d\omega$$

În acest caz $\vec{a}\cdot\vec{n}=u\cdot\frac{\partial v}{\partial n}$, deoarece $grad\,v\vec{n}=\frac{\partial v}{\partial n}$, $\vec{n}$ fiind considerat un versor. Pe de altă parte $div\,\vec{a}=u\cdot\Delta v+grad\,u\cdot grad\,v$, ceea ce rezultă prin calcul direct asupra

lui $\vec{a} = u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \vec{i} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \vec{j} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \cdot \vec{k}$ (sau prin calcul cu nabla). Formula (1) se obține apoi prin simplă înlocuire în formula Gauss-Ostrogradschi.

<u>A doua formulă a lui Green.</u>

În aceleaşi condiții asupra lui u şi v, avem:

(2) $$\iint_S \left(u \cdot \frac{\partial v}{\partial n} - v \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \right) \cdot ds = \iiint_D \left(u \cdot \Delta v - v \cdot \Delta u \right) \cdot d\omega .$$

<u>Demostrație</u>. Schimbând rolurile lui u şi v în (1) obținem:

$$\iint_S v \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \cdot ds = \iiint_D \left(v \cdot \Delta u + grad\, u \cdot grad\, v \right) \cdot d\omega .$$

Scăzând această relație din (1) obținem formula (2).

<u>Consecință</u>. Dacă u şi v sunt funcții armonice în domeniul mărginit de suprafața S, avem:

(3) $$\iint_S u \cdot \frac{\partial v}{\partial n} \cdot ds = \iint_S v \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \cdot ds$$

şi

(4) $$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} \cdot ds = 0 .$$

<u>Demonstrație</u>. Aceste proprietăți ale funcțiilor armonice rezultă direct din formula (2), deoarece Δu=0 şi Δv=0. În particular, proprietatea a doua rezultă din prima dacă luăm v=1.

Are loc şi

<u>Teorema</u> (de reprezentare a funcțiilor armonice în formă integrală).

Fie u o funcție armonică în domeniul $D \subset R^3$ şi S frontiera acestui domeniu. Atunci pentru orice punct $M_0 \in D$ avem:

(5) $$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \cdot \iint_S \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial n} - u \cdot \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} \right] \cdot ds ,$$

unde r este distanța de la M_0 la punctul curent $M \in S$.

Demonstrație. Pornim de la a doua formulă a lui Green (2), în care considerăm $v = \frac{1}{r}$, adică soluția cu simetrie sferică în raport cu M_0, a ecuției lui Laplace. Deoarece în punctul M_0 funcția v nu este definită, folosind faptul că acesta este interior mulțimii D, vom izola acest punct cu o vecinătate sferică $V(M_0,\varepsilon)$, cu cetrul în M_0, de rază ε, suficient de mică pentru ca $V(M_0,\varepsilon)\subset D$. Vom nota cu S_ε suprafața (frontiera) sferei $V(M_0,\varepsilon)$. În domeniul $D_1= D \setminus V(M_0,\varepsilon)$, atât u cât şi v sunt armonice, deci putem aplica formula(2):

$$\iiint_{D_1}(u\cdot\Delta v - v\cdot\Delta u)\cdot d\omega = \iint_S\left(u\cdot\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} - \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial n}\right)\cdot ds - \iint_{S_\varepsilon}\left(u\cdot\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} - \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial n}\right)\cdot ds.$$

Semnul – apare din cauză că normala n, în integrala pe S_ε, se consideră pe exteriorul sferei, în timp ce în formula (2) ar trebui să se considere spre interior.

Se observă că deoarece $u=\frac{1}{r}$ şi $v=\frac{1}{r}$ sunt armonice pe D_1, avem:

$$\iint_S\left(u\cdot\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} - \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial n}\right)\cdot ds = \iint_{S_\varepsilon} u\cdot\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\cdot ds - \iint_{S_k}\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial n}\cdot ds.$$

Prin calcul direct al derivatei după normală, găsim:

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} = \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r} = -\frac{1}{\varepsilon^2},$$

deci, prima integrală pe S_ε devine:

$$\iint_{S_\varepsilon} u\cdot\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\cdot ds = -\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot 4\pi\cdot\varepsilon^2\cdot u^* = -4\pi\cdot u^*,$$

unde u^* este o valoare medie a lui u pe S_ε.

În mod analog, pentru a doua integrală pe S_ε, găsim:

$$\iint_{S_\varepsilon}\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial n}\cdot ds = \frac{1}{\varepsilon}\cdot 4\pi\cdot\varepsilon^2\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^* = 4\pi\cdot\varepsilon\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^*,$$

unde $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^*$ este o valoare medie a lui $\frac{\partial u}{\partial n}$ pe S_ε.

În concluzie putem scrie că:

$$\iint_S \left(u \cdot \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \right) \cdot ds = -4\pi \cdot u^* + 4\pi \cdot \varepsilon \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^* .$$

În această egalitate ε este arbitrar; atunci când $\varepsilon \to 0$, în baza continuităţi funcţiei u, u^* tinde la $u(M_0)$, iar $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^*$ are, de asemenea, o limită finită, astfel că ultimul termen tinde la zero. Se vede că prin această tercere la limtă se obţine tocmai formula (5).

Obsevaţii.

1.Teorema precedentă rămâne valabilă dacă D este un subdomeniu al domeniului de armonicitate al funcţiei u.

2.Formula (5) arată că valorile funcţiei armonice u, în punctele M_0, interioare lui D, sunt determinate de valorile pe frontiera S, şi de valorile derivatei după normală pe S. Aşa cum am văzut deja în problema lui Dirichlet pentru cerc, în general determinarea lui u nu necesită cunoaşterea ambelor grupuri de valori; cunoaşterea valorilor lui u pe S conduce la o problemă Dirichlet, iar cunoaşterea lui $\frac{\partial u}{\partial n}$ pe S conduce la o problemă Neumann.

3.O formulă analoagă cu (5) se poate obţine pentru funcţiile armonice în domenii din plan. Pentru aceasta folosim soluţia cu simetrie cilindrică, $v = \ln\frac{1}{r}$, şi gasim în mod analog:

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_C \left[\left(\ln\frac{1}{r}\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial n} - u \cdot \frac{\partial\left(\ln\frac{1}{r}\right)}{\partial n} \right] \cdot ds ,$$

unde C este o curbă închisă astfel încât $M_0 \in (C) \subseteq D$.

În cele ce urmează vom prezenta două consecințe importante ale formulei (5): teorema de medie şi principiul extremului:

Teoremă (de medie pentru funcțiile armonice).

Dacă u este o funcție armonică pe domeniul D, $M_0 \in D$ şi S este o sferă cu centrul în M_0, de rază a, inclusă cu interiorul în D, avem:

(6) $$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \cdot \iint_S u \cdot ds \quad .$$

Demonstrație. În formula (5) cosiderăm pe r =a şi observând că:

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} = \left.\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r}\right|_{r=a} = -\frac{1}{a^2}$$

obținem:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a} \cdot \iint_S \frac{\partial u}{\partial n} \cdot ds + \frac{1}{4\pi a^2} \cdot \iint_S u \cdot ds = \frac{1}{4\pi a^2} \cdot \iint_S u \cdot ds$$

(deoarece prima integrală este nulă (relația (4))).

Deoarece $4\pi a^2$ este tocmai aria suprafeței S, se spune că $u(M_0)$ este media valorilor lui u pe S.

Teoremă. (principiul extremului pentru funcții armonice).

Valorile extreme ale unei funcții armonice pe un domeniu D se ating pe frontiera acestui domeniu (cu excepția constantelor).

Demonstrație. Să presupunem prin reducere la absurd că funcția u, armonică pe D, îşi atinge maximul într-un punct M_0, interior lui D. Fie $V(M_0,\varepsilon)$ o vecinătate sferică a lui M_0, de rază ε, suficient de mică astfel încât $V(M_0,\varepsilon) \subseteq D$, şi fie S frontiera acestei sfere.

Dacă u nu este constantă, valoarea medie u^*, pe S, este strict mai mică decât $u(M_0)$. Pe de altă parte, aplicând teorema de medie integralei duble din formula (6) obținem:$u(M_0)=u^*$.

Contradicția obținută arată că nu este posibil ca M_0 să fie interior domeniului D.

Observație. Cu toate că în formula (5) sunt exprimate valorile funcției armonice u în funcție de valorile ei pe frontieră şi de valorile derivatei sale după

normală, pe frontieră, această formulă nu este de prea mare folos în practică. O metodă eficientă în rezolvarea problemelor Dirichlet şi Neumann, este aceea a funcțiilor lui Green, care constă în reducerea problemei Dirichlet la o problemă particulară, aceasta depinzând numai de formula domeniului D.

10. Probleme propuse.

1. Să se reducă la forma canonică, ecuațiile cu derivate parțiale de ordinul doi:

$1^0)$ $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+3\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

$2^0)$ $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

$3^0)$ $$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

$4^0)$ $$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

$5^0)$ $$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

$6^0)$ $$6\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-5\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

$7^0)$ $$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

$8^0)$ $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\sin x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\cos^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\cos x\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

$9^0)$ $$4x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2x\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

2. Să se integreze ecuația coardei:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

cu condițiile:

u(0,t)=0, u(l,t)=0

$$u(x,o) = \begin{cases} \frac{2h}{l} \cdot x, & 0 \le x \le \frac{l}{2} \\ \frac{2h}{l} \cdot (l - x), & \frac{l}{2} \le x \le l \end{cases}$$

şi $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$.

$$R: u(x,t) = \frac{8h}{\pi^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \cdot \sin\frac{(2n+1)\pi x}{l} \cdot \cos\frac{(2n+1)\pi c t}{l}.$$

3. Să se integreze ecuația coardei:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

cu condițiile:

u(0,t)=0, u(l,t)=0

$$u(x,o) = -\frac{4h}{l^2} \cdot x(x - l), x \in [o, l]$$

şi $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$.

$$R: u(x,t) = \frac{32h}{\pi^3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \cdot \sin\frac{(2n+1)\pi x}{l} \cdot \cos\frac{(2n+1)\pi c t}{l}.$$

4. Să se determine u(x,t) care satisface ecuația:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} = 0, x \in [0, l], t \in (-\infty, \infty)$$

cu condițiile:

$u(x,t+2\pi)=u(x,t), \quad x\in[0,l], \quad t\in(-\infty,\infty)$

$u(0,t)=0, \quad u(l,t)=f(t), \quad t\in(-\infty,\infty)$

unde f(t) este o funcție de perioadă 2π definită astfel:

$$f(t)=\frac{\sin t}{5-4\cos t}.$$

$$R: u(x,t)=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2l}\right)^n\cdot\sin nt.$$

5. Să se determine funcția u(x,t) care verifică ecuația:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$$

cu condițiile:

$u(x,t+2\pi)=u(x,t)$,

$u(0,t)=f(t)$,

unde f(t) este o funcție de perioadă 2π definită astfel:

$$f(t)=\frac{1}{5-4\cos t}, \quad x\in[0,l], \quad t\in(-\infty,\infty)$$

$$R: u(x,t)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot e^{-\frac{1}{2}n^2x^2}\cdot\cos nt.$$

6. Să se reducă la forma canonică şi să se integreze ecuația:

a) $$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2y\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

$$u=x\cdot f(x\cdot y)+\psi(x\cdot y).$$

b) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+3\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

$$u(0,y)=y, \frac{\partial u}{\partial x}(o,y)=3y^2.$$

$$u=(y-x)^3+2(y-x)+(2x-y)^2+2x-y$$

c) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+5\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+6\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

$$u(x,2x)=e^{-x},\, u(x,3x)=e^{x}$$
$$u=e^{y-3x}+e^{y-2x}-1 .$$

d) $$6\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-5\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

$$u(x,0)=\sin x+\cos x,\, \frac{\partial u}{\partial y}(x,o)=3\cos x-2\sin x$$
$$u(x,y)=\sin(x+3y)+\cos(x+2y) .$$

e) $$x^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\cdot\frac{\partial u}{\partial x}-y\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

$$u(x,1)=e^{x},\, \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=1}=x\cdot e^{-x}$$
$$u(x,y)=sh\, xy+ch\frac{x}{y} .$$

f) $$x^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\cdot\partial y}+y^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\cdot\frac{\partial u}{\partial x}-y\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=0 .$$

CAPITOLUL VII

ELEMENTE DE CALCUL VARIAȚIONAL

1. Probleme geometrice şi mecanice de calcul variațional. Funcțională. Funcții admisibile. Clasificarea extremelor funcționalelor (extreme absolute, extreme relative). Lemele fundamentale ale calculului variațional.

Vom defini noțiunile de bază ale calculului variațional pornind de la ideile sugerate de câteva probleme de extremum clasice.

1) Problema brachistocronei.

Prima problemă de calcul variațional a fost problema brachistocronei.

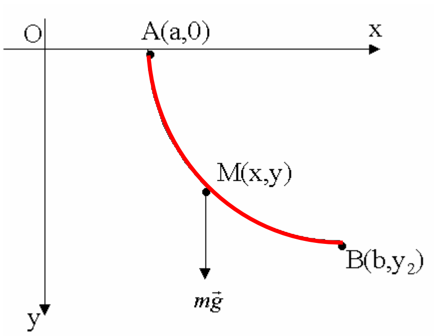


Fig.1.

Un punct material M porneşte din A fără viteză inițială şi se mişcă sub acțiunea gravitației pe arcul de curba AB cuprinsă într-un plan vertical (fig.1). Problema brachistocronei constă în următoarele: dintre toate curbele netede ce unesc punctele A şi B să se determine aceea pe care punctul M ajunge din A în B în timpul cel mai scurt.

Viteza lui M în fiecare punct al arcului AB este:

$$V = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}\,.$$

Timpul în care punctul material M descrie arcul AB va fi dat de: $T = \int \frac{ds}{V} = \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} \cdot dx$, y=y(x),x∈[a,b].

Deci timpul T necesar ca punctul material (mobilul) să ajungă din A în B pe arcul y=y(x), x∈[a,b], are expresia (T[y]):

$$T[y]=\int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\cdot dx,\ y\in C^1[a,b].$$

Spunem că timpul este o funcțională de tip integrală care depinde de y şi care verifică condițiile $y(a)=0$, $y(b)=y_1$.

Funcționala (1) are ca domeniu de definiție funcțiile de clasă $C^1[a,b]$ care trec prin punctele date A şi B.Aceste funcții se numesc *linii admisibile* în cazul problemei brachistocronei sau traiectoriei optimale. Problema revine deci la a determina curba $y(x)\in C^1[a,b]$ care trece prin punctele A şi B pentru care funcționala (1) ia valoarea minimă.

2) Problema geodezicelor.

Fie (S) o porțiune netedă de suprafață a cărei ecuație sub formă implicită este F(x,y,z)=0, iar $\overset{\frown}{AB}$ un arc de curbă, aparținând suprafeței (S) şi care trece prin punctele A şi B de pe suprafața (S). (fig.2). Numim *curbă geodezică* a suprafeței orice arc de curbă de pe suprafața (S) ce realizează minimul distanței dintre două puncte de pe suprafață.

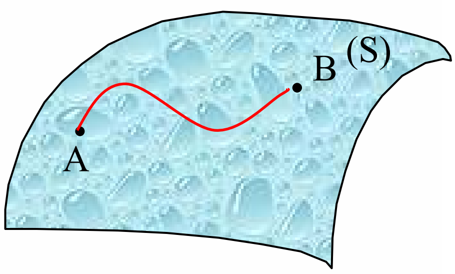


Fig. 2

Dacă y=y(x), z=z(x), x∈[a,b], $y,z\in C^1[a,b]$ sunt ecuațiile parametrice ale unui arc de curbă de pe suprafața (S) ce trece prin A şi B, atunci lungimea arcului $\overset{\frown}{AB}$ este dată de:

(2) $$I[y(x),z(x)]=\int_a^b \sqrt{1+y'^2(x)+z'^2(x)}\cdot dx \quad .$$

În acest fel, problema geodezicelor constă în determinarea funcţiilor y(x) şi z(x) de clasă $C^1[a,b]$ care să treacă prin A, B şi să satisfacă ecuaţia suprafeţei, deci $F(x,y(x),z(x))=0$ şi să realizeze minimul funcţionalei (2) care depinde de două funcţii necunoscute y(x) şi z(x). Mulţimea liniilor admisibile pentru funcţionala (2) reprezintă totalitatea arcelor de curbă de pe suprafaţa (S) cu tangenta continuă şi care trece prin punctele date A şi B. În plan, geodezicele sunt segmente de dreaptă.

3) Problema suprafeţelor minime(Plateau).

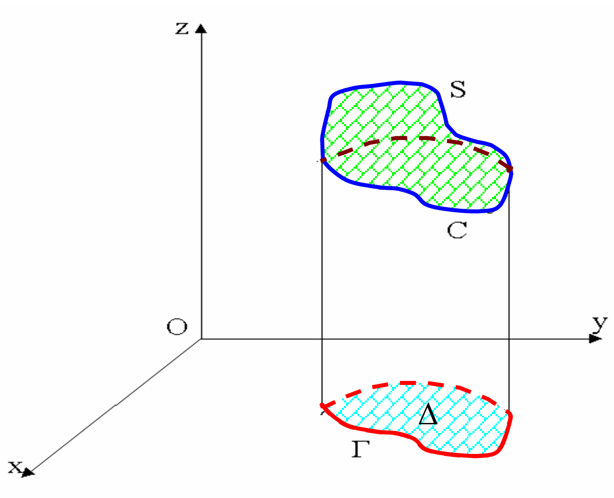


Fig.3.

Dată fiind o curbă simplă închisă C, situată în spaţiul cu trei dimensiuni, se cere să se determine suprafaţa deschisă (S) mărginită de această curbă şi care are aria minimă.

Fie $\Gamma=pr_{xOy}C$, $\Delta=pr_{xOy}S$ şi $z=z(x,y)$, $(x,y)\in\Delta$ ecuaţia suprafeţei (S) (fig.3)

Aria suprafeţei (S) este dată de egalitatea:

$$(3)\; I[z]=A_S=\iint_{\Delta}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\cdot dx\cdot dy$$

Avem de determinat funcţia $z=z(x,y)$ care face minimă integrala (3) şi ia valorile $z=\varphi(x,y)$ pe curba Γ, frontiera domeniului Δ.

4) Probleme de extremum codiţionat.

Cele trei exemple considerate reprezintă probleme tipice de calcul variaţional (extremum necondiţionat). O altă clasă de probleme de calcul variaţional o constituie problemele de extremum condiţionat.

a. Problema formei de echilibru unui fir greu flexibil şi inextensibil de lungime dată, fixat la capete (fig.4).

Poziția de echilibru corespunde cazului când ordonata centrului de greutate y_G are valoarea minimă. Fie $\overset{\frown}{AB}$:y=y(x) ecuația de echilibru. Atunci:

(4) $$y_G = \frac{1}{l} \cdot \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx$$

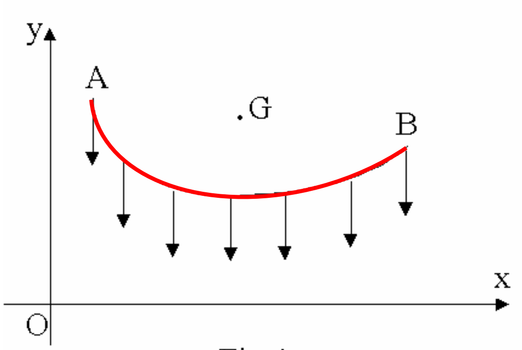


Fig.4.

(l - lungimea AB) $l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx$.

Problema formei de echilibru a lănțișorului constă în determinarea funcției $y=y(x) \in C^1[a,b]$ care să treacă prin punctele A și B, să verifice condiția ` $l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx$ și să realizeze minimul funcționalei (4).

b. Problema izoperimetrică.

Se cere curba plană închisă, de lungime l care delimitează un domeniu mărginit de arie maximă. Fie x=x (t),y=y(t), $t \in [a,b]$ ecuațiile parametrice ale unei curbe C. Avem: x(a)= x(b),y(a)= y(b). Condiția ca lungimea curbei C să fie l se scrie:

(5) $$\int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2} \cdot dt = l,$$

iar aria mărginită de această curbă este dată de integrala:

(6) $$A = \frac{1}{2} \cdot \int_a^b (yx' - xy') \cdot dt \quad .$$

Avem de determinat x= x(t),y=y(t) supuse la codițiile x(a)= x(b), y(a)= y(b) care verifică (5) și fac integrala (6) maximă.

În exemplele prezentate mai sus s-a pus problema extremelor unor integrale care depind de funcțiile care intervin sub semnul de integrare. Astfel, în primul exemplu, avem o integrală de forma:

(7) $$I[y] = \int_a^b F(x, y, y') \cdot dx,$$

în al doilea o integrală:

(8) $$I[y,z]=\int_a^b F(x,y,z,y',z')\cdot dx\,,$$

iar în al treilea:

(9) $$I[u]=\iint_D F(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})\cdot dx\cdot dy\,.$$

<u>Definiție</u>. Fie F o mulțime de funcții. Dacă fiecărei funcții $f\in F$ facem să-i corespundă un număr real, vom spune că avem o funcțională I[f] definită pe F cu valori în R.

<u>Definiție</u>. Se numeşte vecinătate de ordinul n al funcției $f_0\in F$, mulțimea funcțiilor $f\in F$ care pentru orice $x\in[a,b]$ verifică inegalitățile:

(10) $$\begin{cases} |f(x)-f_0(x)|<\varepsilon \\ |f'(x)-f_0'(x)|<\varepsilon \\ \dots\dots\dots\dots \\ |f^{(n)}(x)-f^{(n)}{}_0(x)|<\varepsilon \end{cases}$$

unde ε este un număr strict pozitiv dat (n=0-vecinătate de ordinul zero).

<u>Definiție.</u> Diferența $\delta f_0(x)=f(x)-f_0(x)$, $x\in[a,b]$ se numeşte variația argumentului funcționalei I[f] când se trece de la funcția $f_0\in F$ la funcția $f\in F$.

În exemplele expuse de mai sus am văzut că nu toate funcțiile mulțimii F pe care este definită o funcțională I[f] sunt luate în considerare în problema respectivă (de minim sau maxim).

<u>Definiție</u>. Se numesc *funcții admisibile* într-o problemă de extremum a unei funcționale I[f], $f\in F$, acele funcții din F care satisfac condițiile suplimentare impuse de problema respectivă.

Să precizăm ce se înțelege prin maximul sau minimul unei funcționale.

Fie I[f] o funcțională definită pe mulțimea F şi G, mulțimea funcțiilor admisibile într-o problemă de extremum a funcționalei I[f]. Evident, $G\subset F$.

<u>Definiție</u>. Se spune că I[f] admite un *maxim absolut* pentru $f_0\in G$, dacă pentru orice funcție $f\in G$ avem:

$I[f_0]\geq I[f]$.

Dacă pentru orice funcție $f \in G$ avem:

$I[f_0] \leq I[f]$,

atunci se spune că f_0 realezează un *minim absolut* al funcționalei I[f].

Ca şi petru extremele unei funcții, uneori ne interesează, nu extremele absolute ale unei funcționale, ci extremele relative în care noțiunea de vecinătate joacă un rol important.

Definiție. Se spune că funcționala I [f] admite un *maxim relativ tare* pentru $f_0 \in G$ dacă există o vecinătate de ordinul zero a funcției f_0 astfel încât, pentru orice funcție $f \in G$, conținută în această vecinătate,

$I[f_0] \geq I[f]$

Dacă această inegalitate are loc numai pentru funcțiile $f \in G$ situate într-o vecinătate de ordinul întâi a funcției f_0, se spune că I[f] admite pentru f_0 un *maxim relativ slab*.

Analog se definesc minimele relative tari şi slabe ale funcției I[f].

Maximele şi minimele unei funcționale se numesc *extremele* acelei funcționale.

Evident, orice extrem absolut al unei funcționale este şi extremum relativ tare. De asemenea, orice extremum relativ tare îndeplineşte şi condițiile unui extremum relativ slab.

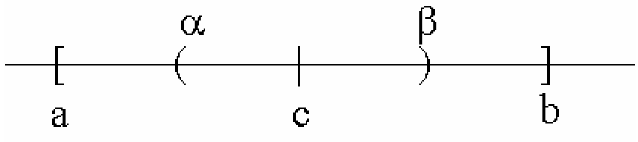
În cele ce urmează vom determina condiții necesare de extremum ralativ slab, acestea fiind condiții necesare şi pentru un extremum relativ tare sau pentru un extremum absolut. Pentru stabilirea unor astfel de condiții vom utiliza două teoreme ajutătoare care se numesc *lemele fundamentale ale calculului variațional.*

LEMA 1 (Lagrange). Fie funcția $f \in C[a,b]$. Dacă

(11) $$\int_a^b f(x) \cdot \eta(x) \cdot dx = 0$$

pentru orice funcție continuă cu derivata continuă, $\eta \in C^1[a,b]$ şi care verifică condițiile $\eta(a) = \eta(b) = 0$, atunci $f(x) \equiv 0$ pe [a,b].

Demonstrație. Să presupunem că într-un punct $c\in[a,b]$ am avea $f(c)\neq 0$. Dacă $c=a$ atunci pe baza continuității rezultă $f(a)\neq 0$. Analog, pentru $c=b$. De aceea vom admite că $f(c)\neq 0$, $c\in(a,b)$. Putem considera $f(c)>0$ (astfel înmulțim cu(-1) relația (11) . Deoarece $f\in C[a,b]$ şi $f(c)>0$ rezultă că există intervalul (α,β), $\alpha < c < \beta$, conținut în [a,b],



astfel încât să avem: $f(x)>0, \forall x\in(\alpha,\beta)$.

Considerăm funcția:

$$\eta(x)=\begin{cases}(x-\alpha)^2\cdot(x-\beta)^2, x\in(\alpha,\beta)\\ 0 \qquad\qquad\qquad\quad , x\notin(\alpha,\beta)\end{cases}$$

Observăm că $\eta(x)$ satisface condițiile lemei ($\varphi(a) = \eta(b) = 0$ şi $\eta\in C^1[a,b]$) şi $\int_a^b f(x)\cdot\eta(x)\cdot dx=\int_\alpha^\beta f(x)\cdot(x-\alpha)^2\cdot(x-\beta)^2\cdot dx>0$ deoarece $f(x)>0$ pentru $x\in(\alpha,\beta)$. Inegalitatea obținută cotrazice egalitatea (11) din lemă şi lema este astfel demonstrată.

LEMA 2 (Du Bois Raymond). Fie funcția continuă $g\in C[a,b]$. Dacă

(12) $$\int_a^b g(x)\cdot\eta'(x)\cdot dx=0$$

pentru orice funcție $\eta\in C^1[a,b]$ care verifică condițiile $\eta(a) = \eta(b) = 0$, atunci $g(x)$ este constantă în intervalul [a,b], deci $g(x)=$ constant.

Prin combinarea celor două leme obținem o propoziție de bază conținând cele două leme şi care se aplică la deducerea condițiilor necesare de extremum.

LEMA FUNDAMENTALĂ A CALCULULUI VARIAȚIONAL. Fie funcțiile continue $f,g\in C[a,b]$. Dacă

(13) $$\int_a^b\left[f(x)\cdot\eta(x)+g(x)\cdot\eta'(x)\right]\cdot dx=0$$

pentru orice funcție $\eta \in C^1[a,b]$ care verifică condițiile $\eta(a) = \eta(b) = 0$, atunci funcția g este derivabilă pe [a,b] şi $g'(x) = f(x)$.

Demonstrație. Considerăm funcția $F(x) = \int_a^x f(t) \cdot dt$ .Observăm că $F'(x)=f(x)$ şi deci:

$$\int_a^b f(x) \cdot \eta(x) \cdot dx = \int_a^b \eta(x) \cdot dF(x) = \eta(x) \cdot F(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x) \cdot \eta'(x) \cdot dx = -\int_a^b F(x) \cdot \eta'(x) \cdot dx .$$

Cu aceasta (13) devine:

$$\int_a^x \left[g(x) - F(x)\right] \cdot \eta'(x) \cdot dx = 0 .$$

Pe baza lemei 2 rezultă g(x)–F(x)= constant, de unde $g'(x)=f(x)$. Cu aceasta lema fundamentală este demonstrată.

2.Funcționale de forma $I[y] = \int_a^b F(x, y, y') \cdot dx$.Condiții necesare de extrem. Ecuația lui Euler. Condiția lui Legendre.

Să considerăm funcționala:

(1) $$I[y] = \int_a^b F(x, y, y') \cdot dx$$

definită pe o mulțime F de funcții y(x), $x \in [a,b]$. Vom determina o condiție necesară de extremum relativ considerând ca funcții admisibile funcțiile $y \in F$, de clasă $C^2[a,b]$ şi care verifică în plus condițiile la limită:

(1) $y(a)=y_1$, $y(b)=y_2$.

Fie y(x) funcția care realizează un extremum relativ pentru (1) şi $\eta(x)$ arbitrară de clasă $C^2[a,b]$ cu $\eta(a)=0$ şi $\eta(b)=0$.

Funcția:

(3) $Y(x) = y(x) + \alpha\eta(x)$,

unde α este un parametru mic în modul, este evident că o funcție admisibilă şi aparține unei vecinătăți de ordinul întâi date a funcției y(x) pentru $|\alpha|$ suficient de

mic. Înlocuind în (1) pe y(x) cuY(x) şi presupunând η(x) fixă, obținem o integrală în funcție de parametrul α:

$$\Im[\alpha] = \int_a^b F[x, y(x) + \alpha\eta(x), y'(x) + \alpha\eta'(x)] \cdot dx .$$

Dacă y(x) realizează un extremum relativ al integralei în mulțimea tuturor funcțiilor admisibile, acesta va trebui să fie un extremum relativ şi în mulțimea Y(x) obținute din (3) pentru diferite valori ale lui α. Condiția necesară de extremum este $\Im'(0)=0$.

Observăm că:

$$\Im'[0] = \int_a^b \{F_y[x, y(x), y'(x)] \cdot \eta(x) + F_{y'}[x, y(x), y'(x)] \cdot \eta'(x)\} \cdot dx ,$$

unde $F_y = \dfrac{\partial F}{\partial y}$ şi $F_{y'} = \dfrac{\partial F}{\partial y'}$.Ultimul termen poate fi integrat prin părți:

$$\int_a^b F_{y'}(x, y, y') \cdot \eta'(x) \cdot dx = [\eta(x) \cdot F_{y'}(x, y, y')]_a^b - \int_a^b \eta(x) \cdot \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y, y') \cdot dx$$

Datorită faptului că η(a) = η(b) = 0, primul termen din membrul drept al egalităţi de mai sus este nul. Deci, condiția $\Im'(0)=0$ devine:

(4) $$\Im'(0) = \int_a^b \left[F_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y, y') \right] \cdot \eta(x) \cdot dx = 0 ,$$

în care funcția y=y(x) realizează un extremum al integralei (1), iar y′=y′(x) este derivata sa. Egalitatea (4) are loc pentru orice $\eta(x) \in C^2[a,b]$ supusă condițiilor η(a)=0, η(b)=0. Cu ajutorul lemei 1, deducem că funcția y(x) verifică ecuația:

(5) $$F_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y, y') = 0 .$$

Ecuația (5) se numeşte *ecuația lui Euler* corespunzătoare funcționalei (1) şi se mai poate scrie şi sub forma:

(5′) $F_{y'y'}; y''+F_{yy};y'+F_{xy'} -F_y=0$,

unde $F_{y'y'} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y'^2}, F_{yy'} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \cdot \partial y'}, F_{xy'} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y'}$

Am obținut astfel următorul rezultat:

Teoremă (Euler). Dacă $F(x,y,y')\in C^2[a,b]$ şi dacă y(x) realiuează un extremum relativ la integralei $I[y]=\int_a^b F(x,y,y')\cdot dx$ în mulțimea funcțiilor din clasa C^2 [a,b] care satisfac condițiile la limită $y(a)=y_1$, $y(b)=y_2$, atunci y(x) verifică ecuația lui Euler (5).

Observație. Ecuația lui Euler este o condiție necesară, dar nu suficientă pentru funcția y(x) care realizează un extremum al funcționalei (1).

Definiție. Orice curbă integrală a ecuației lui Euler (5) se numeşte *extremală* a funcționalei (1) chiar dacă aceasta nu realizează un extremum al funcționalei.

Condiția lui Legendre.

Pentru determinarea naturi extremului unei funcționale, un rol important îl joacă variația de ordinul doi:

$$\delta^2 \cdot I[y;\eta]=\int_a^b \left[P(x)\cdot\eta^2+Q(x)\cdot\eta'^2\right]\cdot dx$$

unde

$$P(x)=F_{yy}-\frac{d}{dx}F_{yy'},Q(x)=F_{y'y'}.$$

Observăm că variația de ordinul doi este formă pătratică în raport cu η şi η′.

Are loc:

Teorema (Legendre). $\delta^2\cdot I[y;\eta]\geq 0 \Leftrightarrow F_{y'y'}\geq 0$.

De aici avem:

Teorema (Legendre). Fie funcționala $I[y]=\int_a^b F(x,y,y')\cdot dx$ definită pe mulțimea liniilor admisibile $D=\{y\in C^2[a,b],y(a)=y_1,y(b)=y_2\}$. Condiția necesară ca linia extremală $\bar{y}=y(x)$, $x\in[a,b]$ să realizeze minimul funcționalei I[y] este ca de-a lungul extremalei să fie îndeplinită inegalitatea:

(6) $F_{y'y'}(\bar{y})\geq 0$.

Analog, pentru ca linia extremală y=y(x), $x\in[a,b]$ să realizeze maximul funcționalei I[y] este ca, de-a lungul ei să fie îndeplinită inegalitatea:

(7) $F_{y'y'}(\bar{y})\leq 0$.

Observație. Relațiile (6) şi (7) se obțin din $\delta^2 \cdot I[y;\eta] \geq 0$ sau $\delta^2 \cdot I[y;\eta] \leq 0$.

3. Funcționale conținând derivate de ordin superior. Ecuația Euler – Poisson. Condiția lui Legendre. Exemplu.

Fie funcționala:

(1) $$I[y] = \int_a^b F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) dx$$

definită pe mulțimea liniilor admisibile:

$$D = \left\{ y \in C^n[a,b] \ / \ y^{(k)}(a) = y_1^k, y^{(k)}(b) = y_2^k, \ k \in \{0,1,...,n-1\} \right\}$$ unde

$F \in C^2([a,b] \times \Delta_{n+1})$, $\Delta_{n+1} \subset R^{n+1}$, $x \in [a,b]$. În mulțimea liniilor admisibile D, se cere să se determine funcția $y \in C^n[a,b]$ care verifică la capetele intervalului [a,b] condițiile:

(2) $$y^{(k)}(a) = y_1^{(k)}, y^{(k)}(b) = y_2^{(k)}, \ k \in \{0,1,...., n-1\}$$

şi realizează extremul funcționalei (1).

Funcția y cu proprietățile de mai sus verifică ecuația:

(3) $$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} - ...... + (-1)^n \cdot \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0$$

numită *ecuația lui Euler-Poisson*.

Demonstrația celor de mai sus se face astfel: dacă y(x) este o funcție care realizează un extremum relativ în mulțimea D care satisface (2), atunci y(x) realizează un extremum relativ şi în mulțimea funcțiilor $Y(x)=y(x)+\alpha\eta(x)$, unde $\eta(x)$ este o funcție fixă din clasa $C^{2n}[a,b]$ anulându-se în punctele a şi b împreună cu derivatele sale până la ordinul n-1 inclusiv, iar α este un parametru care ia valori suficient de mici în modul. Înlocuind în (1) pe y(x) cu Y(x) se obține o integrală funcție de α:

$$\Im(\alpha) = \int_a^b F(x, y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta', ..., y^{(n)} + \alpha\eta^{(n)}) dx,$$

care va trebui să aibă un extremum pentru $\alpha=0$. Pentru aceasta este necesar ca $\Im'(0) = 0$.

Avem:

$$\Im'(0)=\int_a^b\left[\eta F_y+\eta' F_{y'}+....+\eta^{(n)}F_{y^{(n)}}\right]dx$$

Integrând prin părți obținem:

$$\int_a^b \eta^{(k)}F_{y^{(k)}}dx=\left[\eta^{(k-1)}F_{y^{(k)}}\right]\Big|_a^b-\int_a^b \eta^{(k-1)}\frac{d}{dx}F_{y^{(k)}}dx=-\int_a^b \eta^{(k-1)}\frac{d}{dx}F_{y^{(k)}}dx$$

de unde

(4) $$\int_a^b \eta^{(k)}F_{y^{(k)}}dx=(-1)^k\int_a^b \eta(x)\frac{d^k}{dx^k}F_{y^{(k)}}dx, \quad .$$

$k\in\{1,2,....,n\}$ $(\eta^{(k)}(a)=\eta^{(k)}(b)=0,\ k=\overline{0,n-1})$.

Deci:

(5) $$\Im'(0)=\int_a^b\left[F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}-.....+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}\right]\cdot\eta(x)\,dx$$

Datorită acestei egalități şi a lemei 1 , condiția $\Im'(0)=0$ se reduce la (3) şi deci y este determinat.

Calculând variația de ordinul doi $\delta^2 I[y;\eta]$ se poate arăta că pentru ca linia extremală $\overline{y}=y(x), x\in[a,b]$ să realizeze minimul funcționalei (1) este necesar ca de-a lungul ei să avem:

(6) $$F_{y^{(n)}y^{(n)}}(\overline{y})\geq 0$$

iar pentru ca linia extremală $\overline{y}=y(x), x\in[a,b]$ să realizeze maximul funcționalei (1) este necesar ca de-a lungul ei să avem:

(7) $$F_{y^{(n)}y^{(n)}}(\overline{y})\leq 0\,.$$

Inegalitățile (6) şi (7) reprezintă condițiile lui Legendre corespunzătoare funcționalei (1), de-a lungul extremalei $\overline{y}$=y(x).

Exemplu. Fie funcționala $I[y]=\int_0^1\left(2y+y''^2\right)dx$ definită pe mulțimea liniilor admisibile $D=\left\{y\in C^2[0,1], y(0)=y(1)=0, y'(0)=y'(1)=0\right\}$. Să se determine linia admisibilă care realizează extremul funcționalei şi să se specifice natura acestuia.

Avem $F = 2y + y''^2$ şi ecuaţia Euler-Poisson va fi:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} = 0$$

de unde obţinem $y^{(4)} + 1 = 0$ cu soluţia generală

$$y = -\frac{x^4}{24} + A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x + A_4$$

Constantele se determină din condiţiile y(0)=y(1)=0, y'(0)=y'(1)=0 ceea ce asigură ca linia extremală să fie o linie admisibilă. Obţinem:

$$\bar{y} = -\frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{24}, \; x \in [0,1]$$

Deoarece $F_{y''y''}(\bar{y}) = 2 > 0$ condiţia lui Legendre arată că linia extremală realizează minimul funcţionalei. Se obţine $I_{\min}[\bar{y}] = -\frac{1}{720}$.

4.Funcţionale depinzând de mai multe funcţii. Sistemul Euler-Lagrange. Condiţia Legendre. Exemplu.

Să considerăm funcţionala $I : D \to R$,

(1) $$I[y_1, y_2, ..., y_n] = \int_a^b F(x, y_1, y_2, ..., y_n, y'_1, y'_2, ..., y'_n)dx$$

definită pe mulţimea liniilor admisibile:

$$D = \{y_k \in C^1[a,b], \forall k = \overline{1,n} \mid y_k(a) = y_{1k}, y_k(b) = y_{2k}, k \in \{1,2,...,n\}\}$$

şi $F \in C^2([a,b] \times \Delta_{2n}), \Delta_{2n} \subset R^{2n}, x \in [a,b]$.

În mulţimea liniilor admisibile D, se cere să se determine funcţiile $y_1, y_2, ..., y_n \in C^1[a,b]$, şi care verifică la capete condiţiile la limită:

(2) $y_k(a) = y_{1k}, y_k(b) = y_{2k}, \; k \in \{1,2,...,n\}$

şi se realizează extremul funcţionalei (1).

Are loc următoarea

Teoremă: Dacă $F \in C^2([a,b] \times \Delta_{2n})$ şi funcţiile $y_1, y_2, ..., y_n \in D$ realizează extremul funcţionalei (1) atunci ele verifică ecuaţiile:

(3) $$F_{y_k} - \frac{d}{dx}\left(F_{y'_k}\right) = 0, \quad k \in \{1,2,...,n\}$$

((3) – sistemul lui *Euler-Lagrange* corespunzător funcționalei (1))

Demonstrație: Considerăm o mulțime particulară de funcții admisibile de forma:

$Y_k(x) = y_k(x) + \alpha_k \eta_k(x),\ x \in [a,b], k \in \{1,2,...,n\}$ unde $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ este sistemul de funcții pentru care funcționala (1) admite un extremum relativ, $\eta_k(x)$ sunt n funcții fixate arbitrare din clasa $C^2[a,b]$ care se anulează în extremitățile a şi b, iar α_k $k = \overline{1,n}$ sunt n parametri cu valori mici în modul.

Înlocuind $Y_k(x)$ în (1) obținem:

$$\Im(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_1) = \int_a^b F(x, y_1 + \alpha_1\eta_1, y_2 + \alpha_2\eta_2, ..., y_n + \alpha_n\eta_n, y'_1 + \alpha_1\eta'_1, ..., y'_n + \alpha_n\eta'_n,)dx$$

Funcția de mai sus, de n variabile, va trebui să admită un extremum relativ pentru $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$. Pentru aceasta este necesar ca:

$$\frac{\partial\Im}{\partial\alpha_1} = 0,\ \frac{\partial\Im}{\partial\alpha_2} = 0, ..., \frac{\partial\Im}{\partial\alpha_n} = 0 \text{ pentru } \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0.$$

Deci

$$\int_a^b \left(\eta_k \cdot F_{y_k} + \eta'_k \cdot F_{y'_k}\right)dx = 0, \quad k \in \{1,2,...,n\}.$$

Integrând prin părți şi ținând seama că $\eta_k(a) = \eta_k(b) = 0$, obținem:

$$\int_a^b \left(F_{y_k} - \frac{d}{dx}F_{y'_k}\right) \cdot \eta_k(x)dx = 0, \quad k \in \{1,2,....,n.\}.$$

Folosind Lema 1 se obține sistemul (3).

Observație: Orice soluție a sistemului (3) se numeşte extremală a funcționalei (1). O extremală particulară este complet determinată prin condițiile la limită (2).

Fie $\overline{y} = (\overline{y}_1, \overline{y}_2, ..., \overline{y}_n) \in D$ o extremală a funcționalei (1) şi fie $A_{i,j} = \frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \partial y'_j}(\overline{y}), i, j \in \{1,2,...,n\}$

Are loc

Teorema (Condiția Legendre). Notăm prin:

(4) $$D_1 = A_{11}, D_2 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}, ..., D_n = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & ... & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & ... & A_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{n1} & A_{n2} & ... & A_{nn} \end{vmatrix}$$

şi

(5) $$D_k^* = (-1)^k \cdot D_k, \quad k \in \{1,2,....,n\}.$$

Dacă :

(a) $D_1 > 0, D_2 > 0, ..., D_n > 0,$

atunci $\bar{y}$ realizează minim pentru funcționala (1), iar dacă

(b) $D_1^* > 0, D_2^* > 0, ..., D_n^* > 0,$

atunci $\bar{y}$ realizează maxim pentru funcționala (1).

Valoarea extremă a funcționalei în cazurile (a) sau (b) de mai sus, va fi $I[\bar{y}]$.

Exemplu.

Să se determine extremul funcționalei şi natura lui dacă $I: D \to R$,

$$I[y,z] = \int_0^{\pi/2} \left[(y')^2 + (z')^2 + 2yz\right] dx,$$

$$D = \left\{ (y,z) \in C^1\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) \middle| y(0) = z(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, z\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \right\}$$

Ecuațiile Euler-Lagrange sunt: $y'' - z = 0, z'' - y = 0$ Cu soluțiile $\in D$:

$$\begin{cases} y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x \\ z = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x \end{cases}$$

şi din (y,z) $\in D$, obținem $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, $C_4 = 1$, deci linia extremală ce realizează extremul este dat de

$\bar{y}$=sin x, $\bar{z}$=-sin x.

Condițiile lui Legendre sunt:

$D_1 = F_{y'y'} = 2, D_2 = \begin{vmatrix} F_{y'y'} & F_{y'z'} \\ F_{z'y'} & F_{z'z'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$ şi din (a) rezultă că extremala (sin x, -sin x) realizează un minim pentru funcţională. Valoarea minimă se obţine uşor:

$$\mathbf{I}_{min}(\sin x, -\sin x) = 2\pi$$

5. Funcţionale determinate prin integrale multiple. Ecuaţiile lui Euler – Ostrogradschi. Exemplu.

Pentru uşurinţa expunerii vom considera funcţionala $I : D \subset R^2 \to R$ definită printr-o integrală dublă:

(1) $$I[u] = \iint_D F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy \ .$$

Se pune problema extremelor acestei funcţionale în mulţimea funcţiilor $u(x, y) \in C^2(D)$ ce iau valori date pe frontiera C a domeniului D:

(2) $$u(x, y)\big|_C = f(x, y).$$

Are loc următoarea:

Teoremă (Ostrogradschi). Dacă $F \in C^2(D \times \Delta_3), \Delta_3 \subset R^3, (x, y) \in D$ şi $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$, luând valori arbitrare, iar u(x,y) realizează un extremum relativ al funcţionalei (1) în mulţimea funcţiilor din clasa $C^2(D)$ care verifică egalitatea $u(x, y)\big|_C = f(x, y)$, atunci u(x,y) este soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale:

(3) $$\frac{\partial}{\partial x}\left(F_{u_x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(F_{u_y}\right) - F_u = 0$$ unde

$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, u_y = \frac{\partial u}{\partial y}.$

Demonstraţie: Vom considera mulţimea funcţiilor

(4) $$U(x, y) = u(x, y) + \alpha\eta(x, y)$$

unde u(x,y) este funcţia pentru care (1) admite un extremum, $\eta \in C^2(D)$ arbitrară şi $\eta(x, y)\big|_C = 0$, iar α este un parametru care ia valori mici în modul. Dacă u(x,y) are un

extremum în mulţimea funcţiilor admisibile, aceeaşi proprietate o va avea şi în mulţimea (4). Pentru aceasta este necesar ca integrala:

$$\Im(\alpha)=\iint_D F(x,y,u+\alpha\eta,u_x+\alpha\eta_x,u_y+\alpha\eta_y)dxdy$$

să admită un extremum pentru $\alpha=0$. Condiţia $\Im'(0)=0$ se scrie dezvoltat:

$$\Im'(0)=\iint_D \left(\eta F_u+\eta_x F_{u_x}+\eta_y F_{u_y}\right)dxdy=0\,.$$

Integrala referitoare la ultimii doi termeni se mai poate scrie:

$$\iint_D \left(\eta_x F_{u_x}+\eta_y F_{u_y}\right)dxdy=\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta F_{u_x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\eta F_{u_y}\right)\right]dxdy-\iint_D \eta\left[\frac{\partial F_{u_x}}{\partial x}+\frac{\partial F_{u_y}}{\partial y}\right]dxdy\,.$$

Folosind formula lui Green, prima integrală din membrul drept se poate transforma într-o integrală pe frontiera C a domeniului D şi avem:

$$\iint_D \left(\eta_x F_{u_x}+\eta_y F_{u_y}\right)dxdy=\int_C \eta(F_{u_x}dy-F_{u_y}dx)-\iint_D \left[\frac{\partial F_{u_x}}{\partial x}+\frac{\partial F_{u_y}}{\partial y}\right]dxdy\,.$$

Deoarece $\eta(x,y)|_C=0$, integrala curbilinie este nulă şi condiţia $\Im'(0)=0$ devine:

$$\Im'(0)=\iint_D \left[F_u-\frac{\partial F_{u_x}}{\partial x}-\frac{\partial F_{u_y}}{\partial y}\right]\eta(x,y)dxdy=0\,.$$

Această condiţie are loc în ipotezele lemei 1 (în R^2). De aici rezultă ecuaţia (3) şi teorema este demonstrată.

Observaţie: Ecuaţia (3) se numeşte *ecuaţia lui Euler–Ostrogradschi* corespunzătoare funcţionalei (1). Orice soluţie a ecuaţiei (3) se numeşte extremală a funcţionalei (1) chiar dacă acea funcţie nu realizează efectiv un extremum al funcţionalei. Adăugând la ecuaţia (3) o condiţie la limită de forma $u(x,y)|_c=f(x,y)$, se obţine o extremală particulară.

Teorema lui Ostrogradschi poate fi extinsă pentru o funţională de forma:

$$\mathrm{I}[\mathrm{u}]=\iint_{\Omega}\ldots\int \mathrm{F}\left(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\ldots,\mathrm{x}_n,\mathrm{u},\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}_1},\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}_2},\ldots,\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}_n}\right)\mathrm{dx}_1\mathrm{dx}_2\ldots\mathrm{dx}_n,\ \text{unde}\ \Omega\subset R^n.$$

Ecuația lui Euler-Ostrogradschi va avea forma:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial F}{\partial u_k}\right)-\frac{\partial F}{\partial u}=0,\quad \text{unde}\ \mathrm{u}_k=\frac{\partial u}{\partial x_k},\ \ \mathrm{k}\in\{1,2,\ldots,\mathrm{n}\}.$$

Exemplu. Să se găsească extremul funcționalei**:**

$$I[u]=\iint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+x^2y^2\right]dxdy$$

unde $\Omega=\left\{u\in C^2(D):u|_{\partial D}=x^4+y^4-\frac{3}{4}\right\},\ D=\{(x,y)\in R^2:x^2+y^2\le 1\}.$

Soluție:

Ecuația lui Euler – Ostrogradski corespunzătoare funcției

$F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+x^2y^2$ este:

(1) $$\frac{\partial}{\partial x}\left(F_{u_x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(F_{u_y}\right)-F_u=0$$

$\left(u_x=\frac{\partial u}{\partial x},u_y=\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ sau

(1') $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

care este ecuația lui Laplace. S-a obținut problema interioară Dirichlet pentru cerc. Pentru a impune mai uşor condiția la limită $u|_{\partial D}$, vom trece la coordonate polare:

(2) $$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$$

de unde rezultă:

(2') $$\begin{cases}\rho=\sqrt{x^2+y^2}\\ \theta=arctg\,\frac{y}{x}\end{cases}.$$

Observăm că: $\frac{\partial\rho}{\partial x}=\frac{x}{\rho}$, $\frac{\partial\rho}{\partial y}=\frac{y}{\rho}$, $\frac{\partial\theta}{\partial x}=-\frac{y}{\rho^2}$ şi $\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{x}{\rho^2}$.

Obținem:

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial \rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial \theta}\dfrac{\partial \theta}{\partial x}=\dfrac{x}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \rho}-\dfrac{y}{\rho^2}\dfrac{\partial u}{\partial \theta} \\ \text{şi} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial \rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial \theta}\dfrac{\partial \theta}{\partial y}=\dfrac{y}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \rho}+\dfrac{y}{\rho^2}\dfrac{\partial u}{\partial \theta} \end{cases}$$

şi

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{x^2}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}-\dfrac{2xy}{\rho^3}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho\partial \theta}+\dfrac{y^2}{\rho^4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\dfrac{\rho^2-x^2}{\rho^3}\dfrac{\partial u}{\partial \rho}+\dfrac{2xy}{\rho^4}\dfrac{\partial u}{\partial \theta} \\ \text{şi} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{y^2}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\dfrac{2xy}{\rho^3}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho\partial \theta}+\dfrac{x^2}{\rho^4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\dfrac{\rho^2-y^2}{\rho^3}\dfrac{\partial u}{\partial \rho}-\dfrac{2xy}{\rho^4}\dfrac{\partial u}{\partial \theta} \end{cases}$$

Înlocuind (4) în ($1^{/}$) acesta devine:

$$(5)\qquad \rho^2\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0$$

cu condiția la limită:

$$(6)\qquad u\big|_{\partial D}=x^4+y^4-\frac{3}{4}\bigg|_{\substack{x=\cos\theta\\ y=\sin\theta}}=\frac{1}{4}\cos 4\theta$$

Pentru rezolvarea problemei (5) şi (6) vom folosi metoda separării variabilelor; căutăm o soluție de forma:

$$(7)\qquad u(\rho,\theta)=R(\rho)T(\theta).$$

Observăm că $\dfrac{\partial u}{\partial \rho}=R^{/}(\rho)T(\theta), \dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}=R^{//}(\rho)T(\theta)$ şi $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=R(\rho)T^{//}(\theta)$.

Înlocuind în (5) obținem:

$$(8)\qquad \rho^2R^{//}(\rho)T(\theta)+\rho R^{/}(\rho)T(\theta)+R(\rho)T^{//}(\theta)=0$$

de unde prin împărțire la $R(\rho)T(\theta)\neq 0$ obținem:

$$(9)\qquad \rho^2\frac{R^{//}(\rho)}{R(\rho)}+\rho\frac{R^{/}(\rho)}{R(\rho)}=-\frac{T^{//}(\theta)}{T(\theta)}\ .$$

Membrul stâng al ecuației (9) fiind o funcție numai de ρ iar membrul drept fiind o funcție numai de $\theta,$ egalitatea lor este posibilă pentru orice ρ şi orice $\theta,$ numai dacă cei doi membri au aceeaşi valoare constantă pe care o notăm cu λ; din relația (9) obținem următoarele ecuații:

(10) $$T^{//}(\theta)+\lambda T(\theta)=0$$

şi

(11) $$\rho^2 R^{//}(\rho)+\rho R^{/}(\rho)-\lambda R(\rho)=0$$

Funcţia căutată $u(\rho,\theta)$ trebuie să fie periodică în raport cu θ, cu perioada 2π adică să avem $u(\rho,\theta+2\pi)=u(\rho,\theta)$.

Pentru aceasta $T(\theta)$ trebuie să fie periodică cu perioada 2π. Avem deci de găsit valorile parametrului real λ pentru care ecuaţia (10) are soluţii nebanale (problema Sturm - Liouville) periodice cu perioada 2π. Ecuaţia (10) este o ecuaţie diferenţială liniară, omogenă, cu coeficienţii constanţi, cu ecuaţia caracteristică: $r^2+\lambda=0$ şi rădăcinile: $r_{1,2}=\pm\sqrt{-\lambda}$.

Cazul $1^{\underline{0}}$ $\lambda<0$. Găsim $T(\theta)=C_1e^{\sqrt{-\lambda}\theta}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}\theta}$ care este o soluţie exponenţială reală şi ca atare nu este periodică.

Cazul $2^{\underline{0}}$ $\lambda=0$. Avem $r_1=r_2=0$ şi $T(\theta)=A+B\theta.$ Vom determina A_1 şi B_2 astfel încât $T(\theta)$ să fie periodică, cu perioadă 2π, adică $T(\theta)=T(\theta+2\pi)\Leftrightarrow A+B\theta=$ $=A+B(\theta+2\pi)\Leftrightarrow B=0$ şi deci $T(\theta)=A$ (o constantă) soluţie banală, inacceptabilă.

Cazul $3^{\underline{0}}$ $\lambda>0$. Ecuaţia caracteristică are rădăcinile complexe conjugate $r_{1,2}=\pm i\sqrt{\lambda}$ şi deci soluţia generală este $T(\theta)=A\cos\sqrt{\lambda}\theta+B\sin\sqrt{\lambda}\theta.$ Din condiţia $T(\theta+2\pi)=T(\theta)$ şi din faptul că funcţiile $\sin$ şi $\cos$ sunt periodice cu perioada 2π rezultă că: $(\theta+2\pi)\sqrt{\lambda}-\theta\sqrt{\lambda}=2n\pi$ sau $2\pi\sqrt{\lambda}=2n\pi$ de unde:

(12) $$\lambda_n=n^2,\ n\in\{1,2,3,...\}$$

Deci soluţia generală a ecuaţiei (10) este:

(13) $$T_n(\theta)=A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta,\ n\in\{1,2,3,...\}$$

Cu valorile proprii (12) astfel obţinute, ecuaţia (11) devine:

($11^{/}$) $$\rho^2 R^{//}(\rho)+\rho R^{/}(\rho)-n^2R(\rho)=0 \quad .$$

Ecuaţia ($11^{/}$) este de tip Euler; pentru integrarea ei vom face schimbarea de variabilă $\rho=e^t$. Obţinem:

$$\begin{cases} R^{/}(\rho) = e^{-t}\dfrac{dR}{dt} \\ şi \\ R^{//}(\rho) = e^{-2t}\left(\dfrac{d^2R}{dt^2} - \dfrac{dR}{dt}\right) \end{cases}.$$

Înlocuind $R^{//}(\rho)$ şi $R^{/}(\rho)$ ecuația ($11^{/}$) devine:

$$(11^{//}) \qquad \frac{d^2R}{dt^2} - n^2R = 0$$

care este o ecuație diferențială liniară cu coeficienți constanți având ecuația caracteristică $r^2 - n^2 = 0$ cu rădăcinile $r_{1,2} = \pm n$ şi deci soluția generală:

$$(14) \qquad R_n(\rho) = C_n\rho^n + D_n\rho^{-n} \quad .$$

Pentru problema lui Dirichlet interioară trebuie să luăm $D_n = 0$ deoarece în caz contrar $\rho^{-n} = \dfrac{1}{\rho^n} \to \infty$ pentru $\rho \to 0$ şi deci soluția u nu ar fi mărginită în origine. Deci

$$(15) \qquad R_n(\rho) = C_n\rho^n \ .$$

Am găsit astfel pentru ecuația (5) soluțiile :

$$(16) \qquad u_n(\rho,\theta) = R_n(\rho)T_n(\theta) \quad ,n \in \{1,2,3...\}$$

sau

$$(16^{/}) \qquad u_n(\rho,\theta) = \rho^n\left(\overline{\mathrm{A}}_{\mathrm{n}}\cos n\theta + \overline{B}_n\sin n\theta\right) \quad ,n \in \{1,2,3...\}$$

unde $\overline{A}_n = A_nC_n$ şi $\overline{B}_n = B_nC_n$.

Conform principiului suprapunerii efectelor, căutăm o soluție $u(\rho,\theta)$ de forma:

$$(17) \qquad u_n(\rho,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\left(\overline{\mathrm{A}}_{\mathrm{n}}\cos n\theta + \overline{B}_n\sin n\theta\right) \quad ,n \in \{1,2,3...\}$$

Vom determina coeficienții $\overline{A}_n$ şi $\overline{B}_n$ astfel încât ecuația (17) să verifice condiția la limită (6): $u(1,\theta) = u|_{\partial D} = \dfrac{1}{4}\cos 4\theta.$

Observăm că $\overline{A}_4 = \dfrac{1}{4}, \overline{A}_k = 0, \forall k \in N^* - \{4\}, \overline{B}_k = 0, \forall k \in N^*$. Deci soluția $u(\rho,\theta)$ primeşte forma:

(18) $$u(\rho,\theta)=\frac{\rho}{4}\cos 4\theta \quad .$$

Funcționala $I[u]$ admite un minim $I[\bar{u}]$, deoarece $D_1 = F_{u_x u_x}(\bar{u}) = 2 > 0$ şi

$$D_2 = \begin{vmatrix} F_{u_x u_x}(\bar{u}) & F_{u_x u_y}(\bar{u}) \\ F_{u_y u_x}(\bar{u}) & F_{u_y} F_{u_y}(\bar{u}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 .$$

Observăm că

$$F|_{\bar{u}} = \left(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial\rho} - \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\rho} + \frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)^2 + \rho^4\sin^2\theta\cos^2\theta =$$

$$= \left(\frac{4\rho^3}{4}\cos\theta\cos 4\theta + \frac{4\rho^3}{4}\sin 4\theta\sin\theta\right)^2 + \left(\frac{4\rho^3}{4}\sin\theta\cos 4\theta - \frac{4\rho^3}{4}\sin 4\theta\cos\theta\right)^2 +$$

$$+\frac{\rho^4}{4}\sin^2 2\theta = \rho^6\cos^2 3\theta + \rho^6\sin^2 3\theta + \frac{\rho^4}{4}\frac{1-\cos 4\theta}{2} \text{ sau } F_{\bar{U}} = \rho^6 + \frac{\rho^4}{8} - \frac{\rho^4}{8}\cos 4\theta .$$

Deci,

(19) $$I_{\min} = I[\bar{u}] = \iint_{D'}\left(\rho^6 + \frac{\rho^4}{8} - \frac{\rho^4}{8}\cos 4\theta\right)\rho d\rho d\theta$$

unde $D' \begin{cases} 0 \le \rho \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$ şi $dxdy = \rho d\rho d\theta$.

Relația (19) se mai scrie:

$$I_{\min} = \iint_{D'}\left(\rho^7 + \frac{\rho^5}{8}\right)d\rho d\theta - \iint_{D'}\frac{\rho^5}{8}\cos 4\theta d\rho d\theta = \int_0^1\left(\rho^7 + \frac{\rho^5}{8}\right)d\rho\int_0^{2\pi}d\theta -$$

$$-\frac{1}{8}\int_0^1\rho^5 d\rho\int_0^{2\pi}\cos 4\theta d\theta = \left(\frac{\rho^8}{8} + \frac{\rho^6}{48}\right)\Bigg|_0^1 \theta\Bigg|_0^{2\pi} - \frac{1}{8}\frac{\rho^6}{6}\Bigg|_0^1 \frac{1}{4}\sin 4\theta\Bigg|_0^{2\pi} = \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{48}\right)2\pi - 0$$

de unde

$$I_{\min} = \frac{7\pi}{24} \quad .$$

6. Probleme izoperimetrice. Extreme condiționate ale funcționalelor. Teorema lui Euler. Problema lui Lagrange.

Se numeşte *problemă izoperimetrică* problema determinării extremalelor unei funcționale de forma:

(1) $$I[y_1, y_2, ..., y_n] = \int_a^b F(x, y_1, y_2, ..., y_n, y'_1, y'_2, ..., y'_n)dx$$

cu condiția la limită:

(2) $$y_k(a) = y_{1k}, \quad y_k(b) = y_{2k}, \quad k \in \{1,2,...,n\}$$

şi condițiile suplimentare:

(3) $$\int_a^b G_i(x, y_1, y_2, ..., y_n, y'_1, y'_2, ..., y'_n)dx = a_i, \quad i \in \{1,2,....,m\}$$

unde $a_i \left(i = \overline{1,m}\right)$ sunt m constante date.

Vom examina cazul când funcționala este de forma:

(4) $$I[y] = \int_a^b F(x, y, y')dx,$$

şi este dată o singură condiție suplimentară:

(5) $$\int_a^b G(x, y, y')dx = m.$$

Funcțiile F, G şi constanta m sunt date.

Are loc următoarea:

<u>Teoremă</u> (Euler). Dacă funcția $y \in C^2[a,b]$ şi verifică condițiile la limită

(6) $$y(a) = y_1, y(b) = y_2$$

este o extremală a funcționalei (4) şi verifică în plus condiția (5) şi dacă y(x) nu este o extremală a integralei (5), atunci există o constantă λ astfel încât y(x) să fie o extremală a funcționalei

(7) $$K[y] = \int_a^b [F(x, y, y') + \lambda G(x, y, y')]dx .$$

<u>Demonstrație</u>: Să considerăm familia de funcții

(8) $$Y(x, \alpha_1, \alpha_2) = y(x) + \alpha_1\eta_1(x) + \alpha_2\eta_2(x)$$

unde y(x) este extremala căutată, $\eta_1(x)$ şi $\eta_2(x)$ sunt două funcţii fixe arbitrare din $C^2[a,b]$, nule la capetele intervalului:

(9) $\eta_1(a) = \eta_1(b) = 0,\ \eta_2(a) = \eta_2(b) = 0$

iar α_1 şi α_2 doi parametri suficient de mici în modul.

Înlocuind în integrala (5), în locul funcţiei y(x), funcţia $Y(x, \alpha_1,\alpha_2)$ din (8) obţinem o integrală depinzând de α_1 şi α_2:

$$\Im_1(\alpha_1,\alpha_2)=\int_a^b G(x, y+\alpha_1\eta_1+\alpha_2\eta_2, y'+\alpha_1\eta_1'+\alpha_2\eta_2')dx$$

şi condiţia (5) devine

(10) $\Im_1(\alpha_1,\alpha_2)=m$.

Să arătăm că din această egaliatate putem scoate pe α_2 în funcţie de α_1. Calculăm derivatele parţiale ale funcţiei $\Im_1(\alpha_1,\alpha_2)$ pentru $\alpha_1=\alpha_2=0$. Avem:

$$\left(\frac{\partial\Im_1}{\partial\alpha_i}\right)_0=\int_a^b(\eta_i G_y+\eta_i' G_{y'})dx,\ \ i=1,2.$$

Integrăm prin părţi ultimul termen şi ţinând seama de (9), obţinem:

(11) $$\left(\frac{\partial\Im_1}{\partial\alpha_i}\right)_0=\int_a^b\left(G_y-\frac{d}{dx}G_{y'}\right)\eta_i(x)dx,\ \ i\in\{1,2\}..$$

Dacă y(x) nu este o extremală a integralei (5) atunci : $G_y-\frac{d}{dx}G_{y'}\neq 0$ şi putem alege funcţia $\eta_2(x)$ astfel ca $\left(\frac{\partial\Im_1}{\partial\alpha_2}\right)_0\neq 0$ Ecuaţia (10) este verificată de valorile particulare $\alpha_1=\alpha_2=0$, $\Im_1(0,0)=m$, deoarece Y(x,0,0)=y satisface (5). Datorită condiţiei $\left(\frac{\partial\Im_1}{\partial\alpha_2}\right)_0\neq 0$, conform teoremei referitoare la funcţiile implicite, există o vecinătate a punctului $\alpha_1=0$ în care ecuaţia (10) defineşte pe α_2 ca funcţie de α_1 iar derivata $\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1}$ în punctul $\alpha_1=0$ este:

(12) $$\left(\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1}\right)_0=-\frac{\left(\frac{\partial\Im_1}{\partial\alpha_1}\right)_0}{\left(\frac{\partial\Im_1}{\partial\alpha_2}\right)_0}.$$

Reluând familia de funcții (8), care depinde acum de un singur parametru α_1 (deoarece α_2 este funcție de α_1 definită prin (10)) şi înlocuind în (4), obținem o funcție de α_1

$$\Im\left(\alpha_1\right)=\int_a^b F\left(x, y+\alpha_1\eta_1+\alpha_2\eta_2, y'+\alpha_1\eta_1'+\alpha_2\eta_2'\right)dx$$

care trebuie să admită un extremum pentru $\alpha_1=0$,deci $\Im'(0)=0$. Avem:

$$\Im'(0)=\int_a^b\left\{\left[\eta_1+\left(\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1}\right)_0\eta_2\right]F_y+\left[\eta_1'+\left(\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1}\right)_0\eta_2'\right]F_{y'}\right\}dx$$

sau, integrând prin părți ultimul termen şi ținând seama de (9),obținem

$$\Im'(0)=\int_a^b\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\eta_1 dx+\left(\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1}\right)_0\int_a^b\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\eta_2 dx.$$

Dacă înlocuim $\left(\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1}\right)_0$ cu valoarea sa din (12) în care facem înlocuirile date de (11), deducem:

$$\Im'(0)=\int_a^b\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\eta_1 dx+\lambda\int_a^b\left(G_y-\frac{d}{dx}G_{y'}\right)\eta_2 dx,$$

unde

$$\lambda=-\frac{\int_a^b\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\eta_2 dx}{\int_a^b\left(G_y-\frac{d}{dx}G_{y'}\right)\eta_2 dx}.$$

Această egalitate se mai poate scrie:

$$\Im'(0)=\int_a^b\left[F_y+\lambda G_y-\frac{d}{dx}\left(F_{y'}+\lambda G_{y'}\right)\right]\eta_1(x)dx.$$

Condiția $\Im'(0)=0$, datorită lemei 1 se reduce la

$$F_y+\lambda G_y-\frac{d}{dx}\left(F_{y'}+\lambda G_{y'}\right)=0$$

care este chiar ecuația lui Euler corespunzătoare funcționalei (7). Teorema este demonstrată.

Problema lui Lagrange. Să considerăm funcționala:

(13) $$I[y,z]=\int_a^b F(x,y,y',z,z')dx.$$

Problema lui Lagrange constă în determinarea unui arc de curbă $\overset{\frown}{AB}$

(14) $$y=y(x),\ z=z(x),\ \ x\in[a,b]$$

care este situat pe suprafaţa:

(15) $$G(x,y,z)=0$$

şi extremează integrala (13). Punctele A(x_1, y_1, z_1) (x_1=a, x_2=b) şi B(x_2, y_2, z_2) aparţin suprafeţei, deci: G(x_1, y_1, z_1)=0, G(x_2, y_2, z_2)=0. Faptul că A şi B aparţin curbei se traduce prin condiţiile la limită:

(16) $$y(a)=y_1,\ y(b)=y_2,\ z(a)=z_1,\ z(b)=z_2.$$

Are loc următoarea:

<u>Teoremă:</u> (Lagrange). Dacă sistemul de funcţii (14) este un sistem extremal al funcţionalei (13) cu condiţiile (15) şi (16), atunci există o funcţie λ(x) astfel încât sistemul (14) este un sistem extremal al funcţionalei

(17) $$K[y,z]=\int_a^b[F+\lambda(x)G]dx.$$

<u>7. Probleme propuse</u>

1. Să se determine extremalele şi natura lor pentru funcţionala: $I:D\to R$,

a) $$\begin{cases} I[y]=\displaystyle\int_0^{\pi/4}\left[4y^2-y'^2+8y+3\right]dx,\ unde \\ D=\left\{y\in C^1\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]\middle|\ y(0)=-1,\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0\right\}\end{cases}$$

b) $$\begin{cases} I[y]=\displaystyle\int_0^{1}\left[y'^2+y^2+2ye^{2x}\right]dx,\ unde \\ D=\left\{y\in C^1[0,1]\ \middle|\ y(0)=\dfrac{1}{3},\ y(1)=\dfrac{1}{3}e^2\right\}\end{cases}$$

2. Să se determine extremalele şi natura lor pentru funcționala $I : D \to R$,

a) $$\begin{cases} I[y] = \int_0^1 \left(-2y + y''^2\right)dx, \ unde \\ D = \left\{y \in C^2[0,1] \ y(0) = y(1) = 0, y'(0) = y'(1) = 0\right\} \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} I[y] = \int_0^1 \left[y^2 + 2y'^2 + y''^2\right]dx, \ unde \\ D = \left\{y \in C^2[0,1] \ y(0) = y(1) = 0, y'(0) = 1, y'(1) = -sh\,1\right\} \end{cases}$$

3. Să se determine extremalele şi natura lor pentru funcționala $I[y,z] : D \to R$,

a) $$\begin{cases} I[y,z] = \int_0^{\pi/2} \left[y'^2 + z'^2 - 2yz + 5\right]dx, \ unde \\ D = \left\{(y,z) \in C^1\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \middle| \ y(0) = z(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = z\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1\right\} \end{cases}.$$

b) $$\begin{cases} I[y] = \int_0^1 \left[y'^2 + z'^2 + 2y\right]dx, \ unde \\ D = \left\{(y,z) \in C^1[0,1] \middle| \ y(0) = z(0) = z(1) = 0, y(1) = 1\right\} \end{cases}.$$

4. Să se determine extremul funcționalei I:D→R,

$$\begin{cases} I[u] = \iint\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - 3\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \right] dxdy, \ unde \\ D = \left\{ u \in C^1(\Omega) \middle| u(x,0) = x^2, \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = 2x \right\}, \ şi \ \Omega = \left\{ (x,y) \in R^2 \middle| x^2 + y^2 \le 4 \right\} \end{cases}.$$

5. Să se determine extremalele funcționalei I:D→R,

a) $$\begin{cases} I[y] = \int\limits_0^1 y'^2 \, dx, \text{cu legatura} \int\limits_0^1 y \, dx = 3, \ unde \\ D = \left\{ y \in C^1[0,1] \ y(0) = 1, y(1) = 6 \right\} \end{cases}.$$

b) $$\begin{cases} I[y] = \int\limits_0^{\pi} y'^2 \, dx, \text{cu legatura} \int\limits_0^{\pi} y \sin x \, dx = 1, \ \text{unde} \\ D = \left\{ y \in C^1[0,\pi] \ y(0) = y(\pi) = 0 \right\} \end{cases}. \ .$$

CAPITOLUL VIII

DISTRIBUȚII

1. Spații de funcții L^P,K,S,ξ

Fie $x = (x_1, x_2, ...x_n) \in R^n$ şi $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in R^n$ având coordonatele $\alpha_k \in N$, $k \in \{1,2,..., n\}$.

Fie $f : R^n \to \Gamma$ $(\Gamma = R \text{ sau } C)$ o funcție complexă de variabilă reală. Derivata parțială a funcției f se va nota:

$$D_x^\alpha f = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ....\partial x_n^{\alpha_n}} f,$$

unde $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ reprezintă ordinul de derivare al funcției f. În particular $D_x^0 f = f$.

Definiția 1. Numim *suport al funcției* f şi notăm supp mulțimea:

(1) $$\text{supp } f = \overline{\{x \in R^n, f(x) \neq 0\}}$$

adică închiderea mulțimii punctelor din R^n, unde funcția f ia valori diferite de zero. Dacă supp f este mărginită, rezultă că supp f este o mulțime compactă.

Au loc următoarele proprietăți:

(2) $$\begin{cases} \text{supp } (f + g) = \text{supp } f \cup \text{supp } g \\ \text{supp } (f \cdot g) = \text{supp } f \cap \text{supp } g. \end{cases}$$

Definiția 2. Spunem că funcția *este absolut integrabilă* pe R^n dacă este finită integrala:

(3) $$\int_{R^n} |f(x)| dx .$$

Spațiul L^P. Fie p≥1 un număr real şi f o funcție complexă definită pe mulțimea $\Omega \subset R^n$.

Definiția 3. Funcția $f : \Omega \to \Gamma$ este *p integrabilă* pe $\Omega \subset R^n$ dacă integrala:

(4) $$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty \ .$$

Mulțimea funcțiilor p integrabile pe Ω se va nota cu $L^P(\Omega)$ şi se va numi *spațiul* L^P *(Ω)*. $L^P(\Omega)$ este un spațiu vectorial peste Γ.

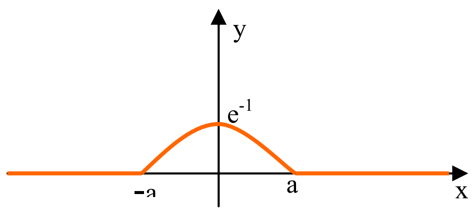
Spațiul K.

Definiția 4. Numim spațiu K, mulțimea funcțiilor complexe $\varphi : R^n \to \Gamma$, indefinit derivabile $\left(\varphi \in C^\infty\left(R^n\right)\right)$ şi cu suport compact.

Acesta este un spațiu vectorial peste corpul Γ, elementul nul fiind funcția $\varphi = 0, \forall\, x \in R^n$.

Exemplu. În spațiul R funcția:

$$\varphi_a(x) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2 - x^2}}, \text{pentru } |x| < a \\ 0 \quad , \text{pentru } |x| \geq a \end{cases}$$ de grafic şi supp $\varphi_a(x) = [-a, a]$



Spațiul K se înzestrează cu o structură de convergență.

Definiția 5. Şirul $(\varphi_i(x))_{i \in N} \in K(R^n)$ converge în spațiul K către funcția $\varphi(x) \in K(R^n)$ şi vom scrie $\varphi_i \to \varphi$, dacă există o mulțime compactă $\Omega \subset R^n$ astfel încât $\text{supp}\, \varphi_i \subset \Omega$ $\text{supp}\, \varphi \subset \Omega$ şi şirul $(\varphi_i) \xrightarrow{u} \varphi$ împreună cu $D_x^\alpha \varphi_i \xrightarrow{u} D_x^\alpha \varphi$.

Spațiul S

Definiția 6. Numim spațiul S al funcțiilor temperate mulțimea funcțiilor complexe $\varphi : R^n \to \Gamma$, indefinit derivabile, care pentru $\|x\| \to \infty$ tind la zero mai repede decât orice putere a lui $\|x\|^{-1}$.

În particular S(R) avem de exemplu funcția $\varphi(x)=e^{-x^2}, x \in R$, cu supp φ=R.

Spațiul ξ.

Definiția 7. Numim spațiu ξ mulțimea funcțiilor complexe $\varphi : R^n \to \Gamma$ indefinit derivabile şi cu suport oarecare.

Exemplu: Funcțiile φ=1, φ=x^2, φ=0 ∈ξ(R).

Există relațiile $K \subset S \subset \xi \subset L^P$.

Spațiile vectoriale K,S, ξ înzestrate cu o structură de convergență se vor numi *spații fundamentale*, iar funcțiile dintr-un asemenea spațiu, *funcții fundamentale*. Un spațiu fundamental se notează cu Φ.

2. Spațiul distribuțiilor. Operații cu distribuții. Exemple.

Fie $(E,\Gamma),(Y,\Gamma)$ două spații vectoriale peste acelaşi corp de scalari Γ iar X⊂E un subspațiu al lui E. Aplicația $T : X \to Y$ se va numi *operator*. Operatorul T este un operator liniar dacă:

$$T(ax+by)=aT(x)+bT(y), \forall a,b \in \Gamma \text{ şi } \forall x,y \in X.$$

O clasă particulară de operatori o formează funcționalele. Astfel dacă Y=Γ atunci operatorul $T : X \to \Gamma$ se va numi *funcțională.* Valoarea unei funcționale în punctul x∈X se va nota T(x)=(T,x) (x∈R sau x∈C). Spunem că funcționala T este liniară dacă satisface condiția de liniaritate a unui operator.

Definiția 1. Numim *distribuție* o funcțională liniară şi continuă definită pe un spațiu fundamental Φ(K,S, ξ).

În felul acesta fiecărei funcții φ∈Φ i se asociază după o anumită lege un număr complex (f, φ) care satisface condițiile:

1) $(f,\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2)=\alpha_1(f,\varphi_1)+\alpha_2(f,\varphi_2), \forall\alpha_1\alpha_2 \in \Gamma \text{ şi } \forall\varphi_1,\varphi_2 \in \Phi$

2) $\varphi_i \xrightarrow{\Phi} \phi \Rightarrow \lim(f,\varphi_i)=(f,\varphi), \quad \varphi_i,\varphi \in \Phi$.

Condiția 1) exprimă liniaritatea funcționalei $f:\Phi \to \Gamma$, iar condiția 2 continuitatea funcționalei. Convergența şirului φ_i către φ se face în sensul convergenței din spațiul fundamental Φ.

Mulțimea distribuțiilor pe Φ se notează cu Φ\`. Astfel distribuțiile definite pe K se notează K\` şi se numesc *distribuții de ordin infinit,* iar distribuțiile definite pe S se notează S\` şi se numesc *distribuții temperate*. În mulțimea distribuțiilor se defineşte operația de adunare şi înmulțire cu scalari astfel:

A) $(f_1 + f_2, \phi) = (f_1, \phi) + (f_2, \phi), \ \forall f_1, f_2 \in \Phi'$ şi $\forall \varphi \in \Phi$

B) $(\alpha f, \phi) = \alpha (f, \phi), \ \forall \alpha \in \Gamma \ \forall f \in \Phi'$ *şi* $\forall \varphi \in \Phi$

Definiția 2. Fie distribuția f ∈ Φ\` şi şirul de distribuții $f_i$ ∈ Φ\`, i∈N. Spunem că şirul (f_i) converge către distribuția f şi vom scrie $\lim_{i\to\infty} f_i = f$ dacă şi numai dacă $\lim_{i\to\infty} (f_i, \varphi) = (f, \varphi), \quad \forall \varphi \in \Phi'$.

Aceasta înseamnă că şirul de distribuții (f_i) converge către distribuția f, dacă şirul de numere complexe (f_i, φ) converge către numărul complex (f, φ). Mulțimea distribuțiilor Φ\` în care este definită adunarea, înmulțirea cu scalari şi o structură de convergență este un spațiu vectorial cu o convergență, numit *spațiul distribuțiilor* Φ\`.

O clasă importantă de distribuții sunt distribuțiile de tip funcție sau distribuțiile regulate. Aceste distribuții sunt generate de funcții local integrabile $\int_{\Omega} |f(x)| dx < \infty, \forall \Omega$ mărginit.

Astfel, dacă $f:R^n \to \Gamma$ este o funcție local integrabilă pe R^n, atunci funcționala $T_f : K \to \Gamma$, dată prin relația:

(1) $(T_f, \varphi) = \int_{R^n} f(x)\varphi(x) dx, \ \varphi \in K,$

este o distribuție pe spațiul K, *numită distribuție de tip funcție*. Pentru simplitate în loc de distribuția T_f vom scrie f.

Exemplul 1. Distribuția $\delta(x), \ x \in R^n$, definită prin relația $(\delta(x), \varphi(x)) = \varphi(0), \ \varphi \in \Phi,$ se numeşte distribuția lui Dirac. Funcționala ce o defineşte

este liniară şi continuă. Se mai spune că distribuția lui Dirac este concentrată în originea. reperului.

***Exemplul* 2** Funcția $\theta: R \to R$ dată prin:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

se numeşte *funcția lui Heavyside*. Această funcție este local integrabilă deoarece $\int_a^b \theta(x)dx$ există. Ea generează o distribuție de tip funcție T_θ, avem:

$$(T_\theta, \varphi) = (\theta(x), \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x)\varphi(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx,$$

unde [a,b] reprezintă suportul funcției fundametale $\varphi \in K$. Distribuția generată de funcția lui Heavyside se numeşte *distribuția lui Heavyside*.

Asupra distribuțiilor avem proprietățiile:

$$x\delta(x) = 0,\ \cos x\delta(x) = \delta(x), \sin x\delta\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \delta\left(x - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$(f(x - x_0), \varphi(x)) = (f(x), \varphi(x + x_0)) \text{ (translația) și}$$

$$(f(-x), \varphi(x)) = (f(x), \varphi(-x)) \text{ (simetria);}$$

dacă f(x) este de o variabilă, omotetia se defineşte prin:

$$(f(ax), \varphi(x)) = \frac{1}{|a|}\left(f(x), \varphi\left(\frac{x}{a}\right)\right),\ a \neq 0, x \in R, f \in \Phi'(R).$$

În particular, pentru distribuția lui Dirac: $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x), a \neq 0.$.

Definiția 3. Numim *suport al unei distribuții* complementara reuniunii mulțimilor deschise pe care se anulează această distribuție.

Exemplu distribuția lui Heavyside are suportul [0,∞), iar distribuția lui Dirac are ca suport punctul x=0.

Între K`,S`, ξ` avem: ξ` ⊂ S` ⊂ K`.

Definiția 4. Un şir de funcții local integrabile $(f_i)_{i \in N}$ defineşte pe R^n este un *şir reprezentativ Dirac* dacă în spațiul distribuțiilor K`, $\lim_{i \to \infty} f_i(x) = f(x)$.

3. Derivarea distribuțiilor. Produsul direct și produsul de convoluție. Proprietăți.

Derivata unei distribuții constituie o generalizare a derivatei unei funcții. Dacă $f \in C^1(R)$, pentru orice funcție fundamentală $\varphi \in K(R)$ putem scrie:

$$(f'(x), \varphi(x)) = +\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) f(x) dx = f'(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x) f(x) dx \ ;$$

cum supp φ este compact, rezultă că $\varphi\Big|_{\pm\infty} = 0$ și astfel relația precedentă devine:

(1) $$(f'(x), \varphi(x)) = -(f(x), \varphi'(x))$$

care este formula de derivare a distribuțiilor. Analog derivata de ordin α

(2) $$\left(D^{\alpha} f, \varphi\right) = (-1)^{|\alpha|}\left(f, D^{\alpha}\varphi\right), \varphi \in K\left(R^n\right).$$

Dacă $f \in K'\left(R^3\right)$ atunci:

$$\left(\frac{\partial^3 f(x,y,z)}{\partial x^2 yz}, \varphi(x,y,z)\right) = (-1)^3\left(f(x,y,z), \frac{\partial^3 \varphi(x,y,z)}{\partial x^2 yz}\right).$$

Pentru derivata distribuției lui Heavyside avem:

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = \delta(x)$$

ceea ce arată legătura dintre distribuția lui Heavyside şi distribuția lui Dirac concentrată în origine. Într-adevăr:

$$\left(\frac{d\theta(x)}{dx}, \varphi(x)\right) = -(\theta(x), \varphi'(x)) = -\int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = -\varphi(x)\Big|_0^{\infty} = \varphi(0) = (\delta(x), \varphi(x)).$$

Fie f şi g două funcții complexe definite respectiv pe R^n şi R^m.

<u>Definiția 1.</u> Funcția complexă $f \times g : R^n \times R^m \to \Gamma$ definită prin relația: $(f \times g)(x,y) = f(x)\cdot g(y)$ se numeşte *produsul direct* sau *tensorial* al funcție f prin g şi se notează:

(3) $$f(x) \times g(y) = f(x) \otimes g(y).$$

<u>Definiția 2</u>. Fie f şi g funcții complexe, local integrabile pe R^n. Funcția $f * g : X \subset R^n \to \Gamma$, unde:

(4) $$(f * g)(x) = \int_{R^n} f(t) g(x-t) dt, \quad x \in X \subset R^n$$

se numeşte *produsul de convoluție* al funcțiilor f şi g. Se poate arăta ca produsul de convoluție este asociativ şi ditributiv:

$$f * g = g * f, f * (g * h) = (f * g) * h$$

şi

$$f * (\alpha g + \beta h) = \alpha(f * g) + \beta(f * h)$$

Exemplu. Să calculăm θ(x)∗θ(x)sin x, unde θ(x) reprezintă funcția lui Heavyside. Putem scrie:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1, x \geq 0 \end{cases}, \quad \theta(x)\sin x = \begin{cases} 0 \quad , x < 0 \\ \sin x, x \geq 0 \end{cases}$$

deci

$$\theta(x) * \theta(x)\sin x = \begin{cases} 0, \ x < 0 \\ \int_0^x \theta(t)\sin(x - t)dt, x \geq 0 \end{cases}.$$

Pentru x ≥ 0 obținem:

$$\int_0^x \theta(t)\sin(x - t)dt = \int_0^x \sin(x - t)dt = \cos(x - t)\Big|_0^x = 1 - \cos x \text{ Deci:}$$

$$\theta(x) * \theta(x)\sin x = \begin{cases} 0, \ x < 0 \\ 1 - \cos x, x \geq 0 \end{cases} = \theta(x)(1 - \cos x).$$

Are loc proprietatea:

<u>Teorema</u> (Titchmarsh). Fie $f, g \in C(R_+)$. Dacă f*g=0, atunci f=0 sau g=0.

Produsul de convoluție definit pentru funcțiile local integrabile se poate generaliza pentru distribuții:

Definiția 3. Fie distribuțiile $f, g \in K'(R^n)$. Numim *produs de convoluție al distribuției* f şi g distribuția f*g, definită pe $K(R^n)$ prin relația:

$$(f(x) * g(x), \varphi(x)) = (f(x) \times g(y), \varphi(x + y)) = (f(x), (g(y), \varphi(x + y))), \quad \forall \varphi \in R^n.$$

Distribuția lui Dirac δ(x) reprezintă elementul unitate în raport cu produsul de convoluție al distribuțiilor: $f \in K'(R^n), f(x) * \delta(x) = f(x)$.

4. Aplicații ale teoriei distribuțiilor. Reprezentarea unei forțe concentrate.

Fie $f_n(x)$ intensitatea forței pe unitatea de lungime ce acționează în punctul M(x) perpendicular pe bara AB (fig.1.).

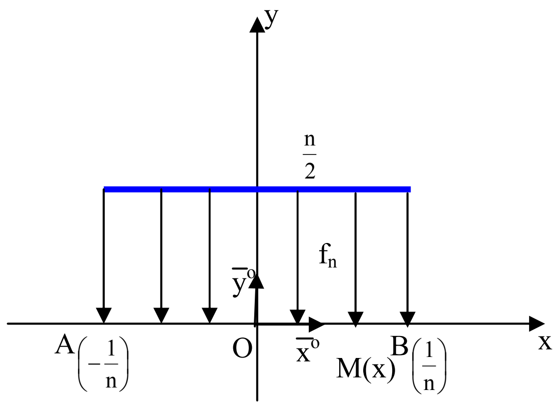


Fig.1.

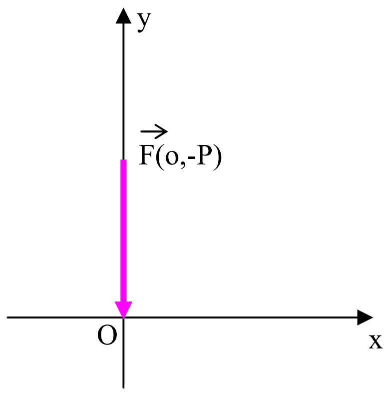


Fig.2.

Intensitatea $f_n(x)$ are expresia:

$$f_n(x)=\begin{cases}\left(n/2\right)P, & \text{pentru } x\in\left[-1/n,1/n\right]\\ 0, & \text{pentru } x\notin\left[-1/n,1/n\right]\end{cases},\ \text{n fiind număr natural, P>0.}$$

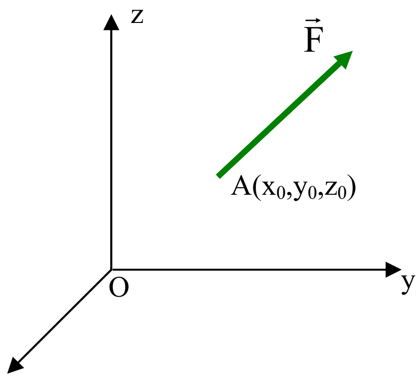
Sistemul de forțe uniform distribuit pe bară are ca rezultantă vectorul $\vec{R}(O,-P)$. Momentul rezultant $\vec{M}_o$ al acestor forțe în raport cu originea reperului este nul. În consecință, sistemul de forțe uniform distribuit pe bară este echivalentul cu vectorul rezultant $\vec{R}$ a cărui mărime este P, adică aria dreptungiului din fig. 1. Pe de altă parte, când $n\to\infty$, intensitatea forței distribuite $f_n=(n/2)P$ tinde la infinit, iar lungimea pe care acționează tinde la zero. Mărimea rezultantei $\vec{R}$ a forțelor este independentă de lungimea barei AB și este egală cu P. Pentru $n\to\infty$ obținem o forță concentrată $\vec{F}(O,-P)$ aplicată în origine. Dar intensitatea $f_n(x)$ a foțelor distribuite reprezintă un șir de funcții ce nu are limită în sens obișnuit. Deci, nu putem scrie $\vec{F}=\lim f_n(x)\vec{y}^o$. Sirul $(f_n(x))$ este un șir reprezentativ Dirac, adică $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\delta(x)$. Deci forța concentrată în origine (fig.2.) se poate scrie sub forma :

$$(5)\quad \vec{F}=\lim_{n\to\infty} f_n(x)\cdot\vec{y}^o=P\cdot\vec{y}^o\lim_{n\to\infty} f_n(x)=P\cdot\delta(x)\vec{y}^o$$

Raționamentul prezentat ne permite ca, în general, o forță $\vec{F}(F_x,F_y,F_z)$ acționând într-un punct $A(x_0,y_0,z_0)$ să fie reprezentată ca forța uniform distribuită în tot spațiul sub forma:

(6) $\vec{q}(x,y,z)=\vec{F}\delta(x-x_o,y-y_o,z-z_o)$

unde $\vec{q}$ reprezintă sarcina distribuită, echivalentă cu acțiunea forței $\vec{F}$ în punctul A.



Conform expresiei (6) a forței concentrate $\vec{F}$ (Fig. 3), direcția, sensul și mărimea forței sunt caracterizate prin vectorul $\vec{F}$, iar punctul de aplicație prin distribuția lui Dirac care are ca suport punctul $A(x_0,y_0,z_0)$. Pentru deducerea expresiei (6) este suficient să considerăm un şir reprezentativ Dirac în R^3, adică $f_n(x,y,z)$ pentru care :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x,y,z)=\delta(x-x_o,y-y_o,z-z_o)$$

În acest mod proiecțiile sarcinii echivalente $\vec{q}$ date de (6) au expresiile

$$(7)\qquad \begin{cases} q_x=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x,y,z)F_x=F_x\delta(x-x_o,y-y_o,z-z_o)\\ q_y=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x,y,z)F_y=F_y\delta(x-x_o,y-y_o,z-z_o)\\ q_z=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x,y,z)F_z=F_z\delta(x-x_o,y-y_o,z-z_o)\end{cases}$$

5. Reprezentarea unui cuplu concentrat

Fie $(\vec{F},-\vec{F})$ un sistem de două forțe paralele, egale ca mărime și de sensuri contrare (fig.1).

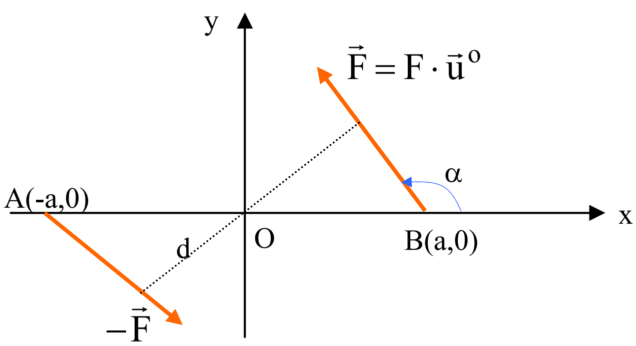


Fig.1.

Acest ansamblu reprezintă în mecanica corpului rigid un cuplu și este caracterizat printr-un vector liber $\vec{M}$, numit momentul cuplului. Brațul cuplului este distanța d dintre liniile de acțiune a celor două forțe paralele, iar mărimea momentului este $M=F\cdot d$, unde $F=|\vec{F}|$.

Dacă ansamblul $(\vec{F},-\vec{F})$ acționează asupra unui solid deformabil, atunci cele două forțe $\vec{F}$ şi $-\vec{F}$ trebuie considerate ca forțe concentrate care nu se pot reprezenta prin vectori alunecători, aşa cum se procedează în cazul solidului rigid. Evident că în cazul solidelor deformabile nu putem să nu luăm în considerație punctele de aplicație A şi B ale celor două forțe paralele precum şi direcția forțelor paralele. Notând cu $\vec{u}^o$ versoul forței paralel, forțelor $-\vec{F}$ şi $\vec{F}$ aplicate respectiv în punctle $A(-a,0)$ şi $B(a,0)$ le corespund sarcinile distribuite:

(1) $\quad (-\vec{F}) \to \vec{q}_1 = -\vec{F}\delta(x+a,0), (\vec{F}) \to \vec{q}_2 = \vec{F}\delta(x-a,0)$

Ansamblului de forțe $(\vec{F},-\vec{F})$ îi corespunde sarcina echivalentă $\vec{q}$ având expresia:

(2) $\quad \vec{q} = \vec{q}_1 + \vec{q}_2 = [-\vec{F}\delta(x+a,0) + \vec{F}(x-a,0)]\vec{u}^o$

<u>Definiția 1</u>. Numim *moment concentrat* în origine, limita, în sensul teoriei distribuțiilor, a ansamblului de forțe concentrate $(\vec{F},-\vec{F})$, când brațul de pârghie $d \to 0$, considerând versorul $\vec{u}^o$ al forței $\vec{F}$ precum şi mărimea momentului $M = F \cdot d$ constante.

<u>Proprietate.</u> Fie $\alpha =< (\vec{F},\vec{x}^o) \neq 0$. Atunci expresia matematică a cuplului concentrat în origine, $\lim\limits_{d\to 0}\vec{q}$, este:

$$\lim_{d\to 0}\vec{q} = -\vec{u}^o \cdot \frac{M}{\sin\alpha} \cdot \frac{\partial\delta(x,y)}{\partial x}$$

<u>Demonstrație</u> Fie $\varphi(x,y) \in K(R^2)$ o funcție fundamentală. Atunci din figura 1, $d = 2a\sin\alpha$ şi ținând seama de relația (2) avem:

$$\lim_{d\to 0}(\vec{q},\varphi) = \vec{u}^o \lim_{d\to 0}\frac{M}{d}\left(\left(\delta\left(x - \frac{d}{2\sin\alpha}, o\right) - \delta\left(x + \frac{d}{2\sin\alpha}, o\right)\right), \varphi\right) =$$
$$= \vec{u}^o \lim_{d\to 0}\frac{M}{d}\left[\varphi\left(\frac{d}{2\sin\alpha}, 0\right) - \varphi\left(-\frac{d}{2\sin\alpha}, 0\right)\right]$$

Aplicând formula creşterilor finite expresiei din paranteză, obținem:

(4) $$\lim_{d\to 0}(\vec{q},\varphi) = \frac{M\vec{u}^o}{\sin\alpha} \cdot \lim_{d\to 0}\frac{\partial\varphi(\xi_d,0)}{\partial x}$$

unde $\xi_d \in \left[-\frac{d}{2\sin\alpha}, \frac{d}{2\sin\alpha}\right]$. Când $d \to 0$ atunci şi $\xi_d \to 0$ şi expresia (4) devine:

(5) $\lim\limits_{d\to 0}(\vec{q},\varphi) = \frac{M\vec{u}^o}{\sin\alpha}\cdot\frac{\partial\varphi(0,0)}{\partial x} = \vec{u}^o\left(-\frac{M}{\sin\alpha}\cdot\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x},\varphi(x,y)\right),$

de unde

(6) $\lim\limits_{d\to 0}\vec{q} = -\frac{\vec{u}^o M}{\sin\alpha}\cdot\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}$

Cu ajutorul acestor momente concentrate putem reprezenta alte sarcini concentrate cu o structură mai complexă.

6. Calculul variațional în distribuții. Probleme discontinue.

În scopul lărgirii cadrului de aplicabilitate a rezultatelor obținute în calculul variațional şi posibilității tratării unor probleme de calcul variațional în care liniile admisibile prezintă discontinuități de speța întâi, vom defini noțiunea de variație a unei funcționale în spațiul distribuțiilor. Fie funcționala:

(1) $I[y] = \int\limits_a^b F(x,y,y')dx$

unde $F \in C^2(D), \quad D \subset R^3$. Mulțimea liniilor admisibile pentru funcționala (1) este mulțimea de funcții

(2) $\Delta = \{y \in C^1[a,b] \mid y(a) = y_1, y(b) = y_2\}$.

Variația de ordinul întâi a funcționalei (1) are expresia :

(3) $\delta I = \delta I(y;\eta) = \int\limits_a^b (F_y\cdot\eta + F_{y'}\cdot\eta')dx$

unde $\eta \in C^1[a,b]$ este o funcție arbitrară, verificând condițiile $\eta(a) = \eta(b) = 0$. În locul funcției η putem considera o funcție fundamentală $\varphi \in K(R)$, având suportul inclus în intervalul [a,b], deci supp $\varphi \subset [a,b]$. În acest fel (3) devine:

(4) $\delta I = \delta I(y;\varphi) = \int\limits_R (F_y\varphi + F_{y'}\varphi')dx$.

Pe de altă parte, lagrangianul F se poate prelungi cu valori nule în afara domeniului lui de definiție $\Delta \subset R^3$, cu toate că acest lucru nu este absolut necesar, întrucât în (4) nu intervin decât valorile din $\Delta \subset R^3$.

Analog, efectuăm o prelungire a liniei admisibile $y \in \Delta$ în afara intervalului [a,b] astfel încât să fie de clasă C^2 pe R, fapt ce este posibil oricând. Mulțimea funcțiilor fundamentale $\varphi \in K(R)$ cu proprietatea supp $\varphi \subset [a,b]$ o vom nota cu K⊂ K. În felul acesta variația de ordinul întâi δI se poate scrie sub forma:

(5) $\delta I(y;\varphi) = (\delta I, \varphi) = (F_{y,}\varphi) + (F_{y',}\varphi')$

ceea ce arată că variația de ordinul întâi este o distribuție definită pe subspațiul K ⊂ K al funcțiilor indefinit derivabile cu suport în [a,b].

Lema fundamentală a calculului variațional în cazul că liniile admisibile sunt distribuții dinspațiul $K'(R)$ este:

Lemă. Condiția necesară şi suficientă pentru ca distribuția $f \in K'(R)$ să fie nulă pe [a,b] este ca $(f(x), \varphi(x)) = 0$ pentru orice $\varphi \in \xi \subset K$, deci supp $\varphi \subset [a,b]$.

Ținând seama de regula de derivare în distribuții, expresia (5) se poate scrie sub forma:

$$(\delta I, \varphi) = (F_y, \varphi) - \left(\frac{d}{dx}F_{y'}, \varphi\right) = \left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}, \varphi\right)$$

de unde pe baza lemei avem ecuația lui Euler în distribuții:

(6) $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$,

operațiile de derivare fiind considerate în spațiul distribuțiilor.

Dacă în x_o extremala are o discontinuitate de spețа I atunci linia extremală pe intervalele $[a, x_0)$, $(x_0, b]$ verifică ecuațiile :

(7) $\frac{\tilde{d}}{dx}(F - y'F_{y'}) = F_x \quad , \frac{\tilde{d}}{dx}F_{y'} = F_y$

($\tilde{d}$ derivata în sens obişnuit), iar curba extermală trebuie să verifice în x_o:

(8) $S_{x_o}(F - y'Fy) = 0 \quad , \quad S_{x_o}(F_{y'}) = 0$

(unde S_{x_o} este saltul funcției în x_o).

Condițiile suplimentare (8) se numesc condițiile Erdmann-Weierstrass.

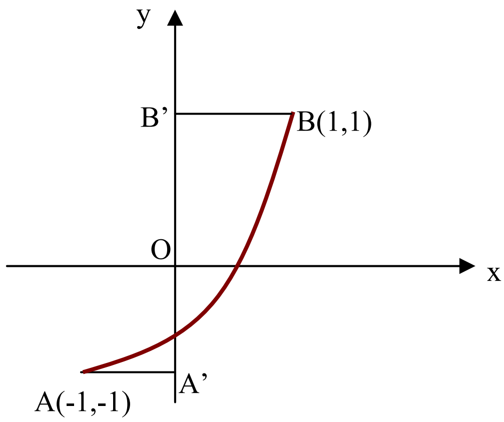
În concluzie, dacă o linie extremală are o discontinuitate de spețа întâi în punctul $x_o \in (a,b)$, atunci ea satisface ecuația lui Euler pe intervalele $[a, x_0)$, $(x_0, b]$,

iar în punctul de discontinuitate x_o trebuie să verifice condițiile Erdmann-Weierstrass.

Exemplu. Fie funcționala:

(9) $I[y] = \int_{-1}^{1} x^2 y'^2 \, dx$

Se cere să se determine curba $y \in C^1[-1,1]$ care să realizeze minimul funcționalei (9) şi să treacă prin punctele A(-1,-1), B(1,1).



Deoarece $F = x^2 y'^2 \geq 0$ rezultă că $I[y] \geq 0$. Cum $\inf I[y] = 0$, rezultă că valoarea minimă a funcționalei este $I[y] = 0$. Aceasta implică F = 0 , deci $y' = 0$ adică y este constant. Aceasta este o funcție de clasă $C^1[-1,1]$, dar nu trece prin punctele A şi B. Prin urmare , funcționala (9) nu î-şi atinge minimul în mulțimea liniilor admisibile de clasa $C^1[-1,1]$. Vom căuta curbe netede pe porțiunea care să realizeze minimul funcționalei. Deci problema nu are soluție în clasa C^1. Ecuația lui Euler corespunzătoare funcționalei (9) este:

(10) $\frac{d}{dx}(x^2 y') = 0$

de unde se obține : $x^2 y' = 0$, ecuație considerată în distribuții. Soluția acestei ecuații este distribuția de tip funcție:

(11) $y(x) = 2\theta(x) - 1 = \begin{cases} 1 & , \quad x > 0 \\ -1 & , \quad x \leq 0 \end{cases}$.

Derivând în sensul distribuțiilor avem:

$y' = 2\delta(x)$ deci $x^2 y' = 2x^2\delta(x) = 0$ ceea ce arată că (11) reprezintă soluția ecuației lui Euler în distribuții.

Prin urmare, curba ce realizează minimul funcționalei este compusă din segmentele paralele cu axa Ox, AA' şi BB' ce trec prin punctele date A şi B.

Punctul de discontinuitate a soluției (11) este $x_o = 0$. În acest punct cele două condiții Erdmann-Weierstrass sunt îndeplinite, $S_o(F - y'F_{y'}) = S_o(-x_o y'^2) = 0$ deoarece $(-x^2y'^2)|_{o-o} = 0$, $(-x^2y')|_{o+o} = 0$, $y' = 0$ pentru $x \neq 0$. Analog $S_o(F_{y'}) = S_o(2x^2y') = 0$. Problema formulată pentru funcționala (9) a fost pusă de către K.Weiestrass.

7. Probleme propuse

1. Să se demonstreze că în $K'(R^2)$ avem:

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta(at - |x|) = a\delta(at - |x|) \ .$$

2. Fie şirul de funcții $(f_n(x))$, $x \in R$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & ,\text{pentru } x < -\frac{1}{n} \\ n(1+nx) & ,\text{pentru} -\frac{1}{n} \le x \le 0 \\ n(1-nx) & ,\text{pentru} 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 0 & ,\text{pentru} x > \frac{1}{n} \end{cases}$$

Să se arate că $(f_n(x))$ este un şir reprezentativ Dirac .

3. Fie distribuția:

$$f_\alpha(x) = \frac{\theta(x)}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}, \ \alpha > 0 .$$

Să se arate că $f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}$.

4. Considerăm operatorul:

$$\Delta = 3\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad (x,t) \in R^2$$

şi distribuţia $E(x,t) \in K'(R^2)$,

$$E(x,t) = \begin{cases} 0 \quad , \quad t < 0 \\ \frac{1}{4}[\theta(x+t) - \theta(3x-t)], \quad t \geq 0 \end{cases}, \ (\theta \in K \mid R)$$

fiind distribuţia lui Heavyside. Să se arate că :

$$\Delta E(x,t) = \delta(x,t).$$

CAPITOLUL IX

TEORIA PROBABILITĂȚILOR

1. Câmp de evenimente. Câmp de probabilitate. Definiția clasică a probabilității. Model generalizat al probabilității. Problema acului (Buffon). Definiția axiomatică a probabilității după A. N. Kolmogorov.

În calculul probabilităților prin experiență se înțelege orice act ce poate fi repetat în condițiile date. Prin eveniment se înțelege orice situație, legată de o experiență despre care putem spune că s-a realizat sau nu în urma efectuării experienței.

Astfel, considerăm experiența aruncării unui zar. Rezultatul experienței este apariția uneia dintre cele şase fețe cu numerele 1,2,3,4,5,6. În acest caz, actul aruncării zarului constituie experiența. Un eveniment al acestei experiențe poate fi considerat, de exemplu, apariția feței cu cifra 3.

Fiecărei experiențe i se asociează două evenimente speciale, numite evenimentul sigur, notat cu E, şi evenimentul imposibil, notat cu Φ.

Definiția 1. Numim *eveniment sigur E* acel eveniment care se realizează întodeauna la fiecare efectuare a experienței. Prin *evenimentul imposibil* Φ se înțelege evenimentul care nu se produce la nici o efectuare a experienței.

Definiția 2. Numim *sistem de evenimente* într-o experiență dată mulțimea de evenimente ce pot apărea în acea experiență.

Fie A un eveniment legat de o experiență dată. Numim *contrarul* (opusul sau complementarul) evenimentului A evenimentul notat $\bar{A}$, care constă în nerealizarea evenimentului A.

Conform celor de mai sus avem: $\bar{E} = \Phi$ şi $\bar{\Phi} = E$.

Dacă odată cu evenimentul A se realizează şi evenimentul B, atunci vom spune că A implică B şi vom scrie $A \subset B$.

Exemplu : În experiența aruncării cu zarul:

(1) $\subset (1,5)$; $(2,3) \subset (2,3,4,5)$.

Avem următoarele proprietăți evidente:

$A \subset A$, $A \subset E$; dacă $A \subset B$ şi $B \subset C$ atunci $A \subset C$ (tranzitivitatea). Dacă $A \subset B$ şi $B \subset A$, cele două evenimente se numesc echivalente şi se scrie A = B.

Dacă A şi B sunt două evenimente din acelaşi sistem, atunci evenimentul care constă în apariția fie a evenimentului A, fie a evenimentului B se numeşte *reuniunea evenimentelor A şi B* şi se notează A U B.

Evenimentul care constă în realizarea simultană a ambelor evenimente se numeşte evenimentul " A şi B" sau *intersecția evenimentelor* A, B notat $A \cap B$. Avem: $A \cap E = A$, $A \cap \Phi = \Phi$. Operațiile "U" şi "∩" sunt comutative, asociative, iar "∩" este distributivă față de "U".

Are loc şi proprietatea $\bar{A} = CE\ A = E \setminus A$.

Fie A şi B evenimente ale sistemului S. A şi B sunt *evenimente compatibile,* dacă acestea se produc simultan: $A \cap B \neq \Phi$. Evenimentele A şi B se numesc evenimente incompatibile (sau disjuncte) dacă ele nu se pot realiza simultan: $A \cap B \neq \Phi$.

<u>Definiția 3.</u> Două evenimente din acelaşi sistem de evenimente se numesc *independente* , dacă realizarea unuia nu depinde de realizarea celuilalt.

<u>Definiția 4.</u> Două evenimente se numesc *dependente* dacă producerea unui eveniment are loc numai dacă celălalt eveniment se produce.

Exemplu. A= (2,3,6), B= (2,4) sunt evenimente dependente în aruncarea zarului şi compatibile; A= (2,4,6) şi C= (1,5) sunt evenimente independente şi incompatibile.

<u>Definiția 5.</u> O mulțime F se numeşte câmp de evenimente dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:

a) $E \in F$, E fiind evenimentul sigur;
b) Oricare ar fi evenimentul A din F, contrariul său $\bar{A}$ se găseşte în F;

c) Dacă A,B $\in$F atunci A U B $\in$F .

d) În cazul că F conține o infinitate de evenimente $A_i \in$ F atunci $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in$ F.

Se spune că F este un câmp *finit* sau *infinit* după cum F conține un număr finit sau o infinitate de evenimente distincte.

Din definiția câmpului de evenimente rezultă proprietățile:

1) $\Phi \in$ F ($\Phi = \bar{E}$ şi se aplică b));

2) $\forall$ A, B $\in$ F $\Rightarrow$A $\cap$ B $\in$ F;

3) $\forall$ A, B $\in$ F$\Rightarrow$ B \ A $\in$ F.

cu A$\subset$B

Fie A un eveniment corespunzător unei experiențe. Repetând experiența de n ori în condiții identice, să presupunem că evenimentul A s-a produs de a ori.

<u>Definiția 6.</u> Numim *frecvență relativă* a evenimentului A numărul $f_n = \frac{a}{n}$.

Numărul a se numeşte *frecvență absolută*.

Numărul în jurul căruia se grupează frecvențele relative se numeşte probabilitatea de apariție a evenimentului A şi se notează P(A).

<u>Definiția 7.</u> (*definiția clasică a probabilității*).

Probabilitatea realizării unui eveniment este dată de raportul dintre numărul cazurilor favorabile şi numărul cazurilor egal posibile.

Această definiție este satisfăcătoare numai în cazul câmpurilor finite de evenimente.

Se poate generaliza prezentarea modelului de calcul al probabilităților P(A), la mulțimile continue (sau numărabile).

În acest sens mărimilor continue ca: lungime, arie, volum, greutate, timp etc. li se asociază o funcție m(X) – numită măsură – care se bucură de următoarele proprietății:

a) m(X) $\geq$ 0

b) $m(\Phi) = 0$

c) dacă $\{X_k,\ k \in \{1,2,\dots,n\}\}$ este un sistem de mulţimi disjuncte atunci

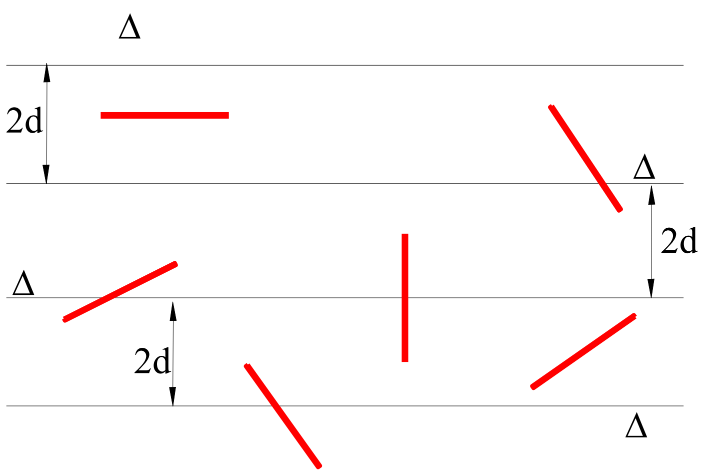
$$m\left(\bigcup_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} m(X_k).$$

Dacă notăm cu m(X) măsura mulţimii asociate evenimentului X şi cu m(E) măsura mulţimii asociate evenimentului sigur E, atunci:

(1) $$P(X) = \frac{m(X)}{m(E)}$$

Formula (1) poate fi aplicată atât în cazul câmpurilor finite cât şi infinite de evenimente, discrete sau continue. Măsurile evenimentelor se adoptă în funcţie de natura evenimentelor. Astfel, dacă evenimentele pot fi puse în corespondenţă cu imagini geometrice ca segmente, figuri plane sau spaţiale, atunci ca măsuri ale evenimentelor se pot lua lungimi, arii, volume.

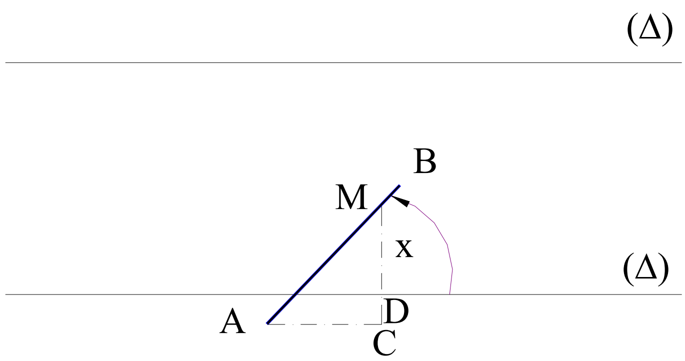
Exemplu . *Problema acului (Buffon*).* Pe un plan orizontal sunt trasate dreptele paralele Δ la aceeaşi distanţă (2d) (figura):



Se aruncă în plan un ac AB de lungime 2l, $l \le d$. Să se determine probabilitatea ca acul să întâlnească una din dreptele paralele.

*Georges- Louis Leclerc, Compte le Buffon (1707-1788). Celebru om de ştiinţă francez şi în acelaşi timp mare scriitor.

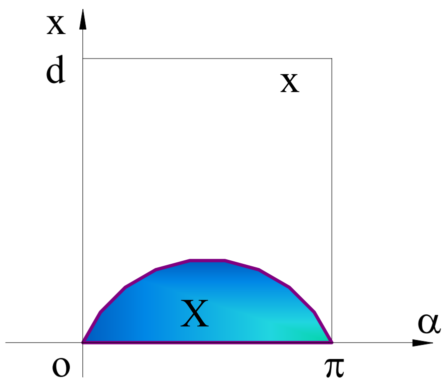
Poziția acului AB în planul dreptelor Δ constituie un eveniment întâmplător, care este dată de doi parametrii, care, de asemenea în experiența făcută, au valori întâmplătoare. Pentru fixarea parametrilor care determină poziția acului AB în plan, considerând mijlocul M al lui AB, constatăm că distanța x a lui M de cea mai apropiată dreaptă Δ şi unghiul α pe care îl face cu dreapta Δ(figura de mai jos) determină complet poziția acului: deci x şi α pot fi considerate drept parametri.



Valorile posibile ale acestor parametri sunt date de sistemul de inegalități:

(2) $\quad 0 \leq x \leq d \quad ; \quad 0 \leq \alpha \leq \pi$.

Astfel interpretat, evenimentul sigur E îi corespunde mulțimea punctelor din planul $0\ \alpha\ x$ de coordonate (α, x) corespunzător sistemului de inegalități (2), adică evenimentului sigur îi corespunde dreptunghiul de laturi π şi d (figura de mai jos):



Evenimentul X cerut de experiență, adică AB să întâlnească pe Δ are loc când MD ≤ MC adică

(3) $\quad x \leq l \sin \alpha$.

Astfel interpretat, evenimentul X, îi corespunde în planul $0\alpha x$ mulțimea punctelor (α, x) care satisfac inecuația (3), această mulțime reprezentând aria primei bucle a sinusoidei (figura de mai sus).

Mulțimile E şi X au drept măsură ariile corespunzătoare, adică avem:

$$m(E) = \pi d,\ m(X) = \int_0^\pi l \sin\alpha \, d\alpha = 2l.$$

Rezultă:

$$P(X) = \frac{m(x)}{m(E)} = \frac{2l}{\pi d}.$$

O definiție simplă, corectă şi corespunzătoare este cea dată de A.N.Kolmogorov* în 1931.

Definiția 8. *(Definiția axiomatică a probabilității după A.N.Kolmogorov*).* Fie $\Im$ un câmp finit sau infinit de evenimente. Numim *probabilitate* pe câmpul $\Im$ aplicația P: $\Im \to R$ verificând următoarele condiții:

1) $\forall$ A $\in \Im$, P(A) $\geq$ 0;

2) P(E) = 1;

3) $\forall$ A, B $\in \Im$, $A \cap B = \Phi$, $P(A \cup B) = P(B) + P(B)$;

4) dacă $\Im$ este un câmp infinit, atunci $\forall\ A_i \in \Im$, $A_i \cap A_j = \Phi$, $i \neq j$, avem

$$P(\bigcup_{i\in N} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Din definiția 8 a probabilității rezultă următoarele consecințe:

1° P (Φ) = 0;

2° $\forall A \in \Im \Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$ şi $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;

3° $\forall A, B \in \Im, A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$;

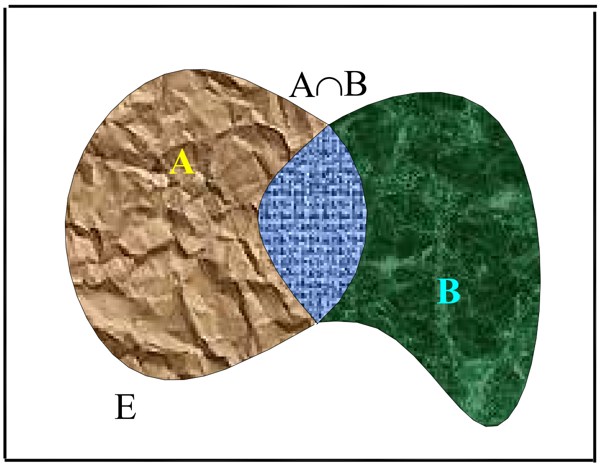
4° $\forall A_i \in \Im$ (i= 1,2,…,n) şi $A_i \cap A_j = \Phi$ ($i \neq j$), avem: $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

* A.N.Kolmogorov (n.1903) matematician rus, pionierul axiomatizării calculului probabilităților, făcută în 1929.

2. Probabilități condiționate

Fie A şi B două evenimente aparținând câmpului $\Im$. Dacă evenimentele sunt dependente rezultă că probabilitatea unuia din evenimente depinde de faptul că celălalt eveniment s-a realizat.

Definiție. Se numeşte *probabilitate condiționată* a evenimentului B de către evenimentul A şi se notează (B/A)=P_A(B), probabilitatea evenimentuli B calculată în ipoteza că evenimentul A s-a realizat. În mod analog P(A/B)=P_B(A), este probabilitatea condiționată a evenimentului A de către evenimentul B.



Constituind evenimentul produs $A \cap B$ (figura), se constată că evenimentul dependent B/A este realizat de evenimentul $A \cap B$ raportat la evenimentul A (ca eveniment sigur), iar evenimentul dependent A/B este realizat de evenimentul $A \cap B$ raportat la evenimentul B (ca eveniment sigur).

Notând cu m(X) măsura corespunzătoare evenimentului X , putem scrie :

$$P(B/A) = \frac{m(A \cap B)}{m(A)} = P_A(B); P(A/B) = \frac{m(A/B)}{m(B)} = P_B(A).$$

Observăm că :

$$\frac{m(A \cap B)}{m(A)} = \frac{\frac{m(A \cap B)}{m(E)}}{\frac{m(A)}{m(E)}}, \text{adică } P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Deasemenea putem scrie : $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Din ultimile două relații rezultă:

$$P(A \cap B) = \begin{cases} P(A) \cdot P_A(B) \\ P(B) \cdot P_B(A) \end{cases},$$

adică probabilitatea producerii simultane a două evenimente dependente este egală cu produsul dintre probabilitatea unuia din evenimente şi probabilitatea condiționată a celuilalt eveniment, în ipoteza că primul eveniment a avut loc.

3. Probabilitatea evenimentelor rezultate din operații cu evenimente.

3.1. Reuniunea evenimentelor compatibile.

Pentru două evenimente compatibile A şi B, măsurile mulțimilor asociate satisfac relația

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$$

care prin împărțirea cu m(E), se scrie:

$$\frac{m(A \cup B)}{m(E)} = \frac{m(A)}{m(E)} + \frac{m(B)}{m(E)} - \frac{m(A \cap B)}{m(E)}$$

adică

(1) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$

Formula (1) dă regula de calcul a probabilității evenimentului reuniune, a două evenimente compatibile. Rezultatul precedent se generalizează prin inducție obținându-se formula:

(2) $$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} P(A_i \cap A_j) + ... + (-1)^{n-1} \cdot P(\bigcap_{k=1}^{n} A_k),$$

numită formula lui Poincare*.

3.2. Intersecția evenimentelor dependente şi independente.

Fie $A_1, A_2, ..., A_n$ evenimente dependente. Are loc formula:

(3) $$P(\bigcap_{K=1}^{n} A_K) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) ... P_{\bigcap_{K=1}^{n-1} A_K}(A_n).$$

* H.Poincare (1854-1912)- matematician francez (lucrări: analiză, mecanică, fizică matematică, probabilități).

Dacă $A_1, A_2, ..., A_n$ sunt evenimente independente atunci are loc formula:

(4) $$P(\bigcap_{k=1}^{n} A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2)...P(A_n).$$

Altă fomulă de calcul a probabilității reuniunii de evenimente.

Fie sistemul de evenimente compatibile şi independente $A_k, k \in \{1,2,...,n\}$. Are loc formula:

(5) $$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = 1 - P(\bigcap_{k=1}^{n} A_k) = 1 - \prod_{k=1}^{n}[1 - P(A_k)].$$

3.3. Inegalitatea lui Boole*. Exemplu.

Fie $A_k \in \Im, k \in \{1,2,...,n\}$, un sistem de evenimente despre care nu ştim dacă sunt independente sau dependente. În acest caz, se poate scrie o inegalitate care limitează inferior probabilitatea evenimentului produs. Din (1), deoarece $0 \le P(A \cup B) \le 1$, obținem:

(6) $$P(A \cap B \ge P(A) + P(B) - 1$$

sau în general:

(7) $$P(\bigcap_{k=1}^{n} A_k) \ge \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - (n-1).$$

Relația (7) constituie *inegalitatea lui Boole* şi dă o margine inferioară a probabilității evenimentului intersecție când nu se cunoaşte dacă evenimentele sunt dependente sau independente.

Exemplu Să presupunem că un complex turistic (o bancă; o piață de desfacere etc.) pentru a corespunde cerințelor de a fi competitiv (vis a vis de necesitățile cerute de turişti etc.), trebuie să îndeplinească condițiile (conform cerințelor) A (să aibă de exemplu bazine de înot etc.), B (cabinete medicale de tipul a), b),…), C (să aibă restaurant unde se pot servi mese cu meniuri la alegere a), b),…), D (în camere să existe: televizor, program pe satelit , frigider, etc.). Ştiind că 86% din componentele complexului îndeplinesc condiția A, 92%

* G.Boole (1815-1864), matematician englez. A folosit pentru prima dată o algebră constituită pe principii logice.

condiția B, 95% condiția C, 82% condiția D. În ipoteza că o societate de turism efectuează excursii la diverse complexe, solicită 500 lei în cazul în care sunt oferite la maximum cerințele A, B, …; să se afle care este suma minimă ce poate fi solicitată de societate de la turist, în cazul când efectuează o excursie la complexul turistic de mai sus?

Complexul corespunde "stasului" dacă se realizează evenimentul X = $A \bigcap B \bigcap C \bigcap D$.

Aplicând inegalitatea lui Boole obținem:

$P(X) \geq P(A) + P(B) + P(C) + P(D) - 3 = 0{,}86 + 0{,}92 + 0{,}95 + 0{,}82 + 3 = 3{,}55 - 3 = 0{,}55,$
$P(X) \geq 0{,}55$

Suma minimă ce va putea fi solicitată: 270,5 lei.

3.4. Formula probabilității totale. Formula lui Bayes*. Exemplu.

Fie $\Im$ un câmp de evenimente şi S= $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ un sistem complet de evenimente ale lui $\Im$, precum şi evenimentul X$\in \Im$ care se realizează când unul din evenimentele A_k se realizează. Cunoscând probabilitățile condiționate $P_{A_K}(X), k = \overline{1,n}$ se cere să se determine probabilitatea evenimentului X, adică P(X).

Evident are loc relația:

$$X = (A_1 \cap X) \cup (A_2 \cap X) \cup ... (A_n \cap X),$$

iar incompatibilitatea evenimentelor A_k antrenează şi incompatibilitatea evenimentelor $A_k \cap X$. Probabilitatea evenimentului X, folosind calculul probabilității reuniunii evenimentelor incompatibile, precum şi probabilitatea evenimentelor condiționate este:

$$(8) \qquad P(X) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k \cap X) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \cdot P_{A_K}(X),$$

rezultat numit *formula probabilității totale*, permițând determinarea probabilității evenimentului X dacă sunt cunoscute *a priori* probabilitățile P(A_K)şi *a posteriori* probabilitățile $P_{A_K}(X), k \in \{1,2,...,n\}$.

• Thomas Bayes (n.1763) matematician englez. S-a ocupat de probabilitatea a posteriori.

Punând problema de a determina probabilitatea a posteori a evenimentului A_K în ipoteza realizării evenimentului X, adică $P_X(A_k)$, pornind de la identitatea:

$$P(A_k \cap X) = P(A_k) \cdot P_{A_K}(X) = P(X) \cdot P_X(A_k),$$

din relația de mai sus şi egalitatea (8), obținem:

$$(9) \qquad P_X(A_k) = \frac{P(A_k) \cdot P_{A_K}(X)}{P(X)} = \frac{P(A_k) \cdot P_{A_K}(X)}{\sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(X)}.$$

Exemplu. Un magazin cumpără acelaşi produs de la trei fabrici F_1, F_2, F_3 în cantități proporționale cu numerele 3; 2; 5. Se cunosc proporțiile respective ale produselor cu defecte a fiecărei fabrici: 1%; 2,5%; 2%. O cantitate de produse în valoare de 6.300 lei care a fost cumpărată este restituită în baza contractului de garanție, ca având defecte ce o fac de neîntrebuințat, iar suma respectivă restituită cumpărătorului.

Ce sume trebuie imputate fiecărei fabrici, dacă nu se ştie de la ce fabrică s-a cumpărat produsul restituit?

Soluție. Evident, sumele de bani imputate fabricilor F_i , (i = 1,2,3) nu pot fi decât proporționale cu probabilitățile ca marfa restituită să provină de la fabrica respectivă.

Să calculăm aceste probabilități. Notăm cu A_i evenimentul ca marfa să fie de la fabrica F_i, i = 1,2,3 şi cu X evenimentul ca marfa să fie defectă. Avem următoarele evenimente: X/ A_K, marfa defectă care aparține fabricii F_K, probabilitatea corespunzătoare, fiind $P_{A_K}(X); A_K / X$, marfa care aparține fabricii F_K este defectă, probabilitatea corespunzătoare, fiind $P_X(A_K)$. Aplicând formula lui Bayes avem:

$$p_k = P_X(A_k) = \frac{P(A_k) \cdot P_{A_K}(X)}{\sum_{i=1}^{3} P(A_i) P_{A_i}(X)}, \ k \in \{1,2,3\}.$$

Din datele problemei rezultă:

$$P(A_1)=\frac{3}{10}=0{,}3; P(A_2)=\frac{2}{10}=0{,}2; P(A_3)=\frac{5}{10}=0{,}5;$$

$$P_{A_1}(X)=0{,}01; P_{A_2}(X)=0{,}025; P_{A_3}(X)=0{,}02.$$

Formula precedentă ne dă:

$$p_1=\frac{1}{6},\quad p_2=\frac{5}{18},\quad p_3=\frac{5}{9}.$$

Sumele imputate vor fi s_i, i = 1,2,3, care satisfac relațiile:

$$\frac{s_1}{\frac{1}{6}}=\frac{s_2}{\frac{5}{18}}=\frac{s_3}{\frac{5}{9}} \text{ sau } \frac{s_1}{3}=\frac{s_2}{5}=\frac{s_3}{10}=\frac{6.300}{18}$$

Se obține: s_1= 1.050 lei ; s_2= 1.750 lei şi s_3= 3.500 lei.

4. Scheme probabilistice clasice.

4.1 Schema urnei cu bile nerevenite. Exemplu.

Să considerăm o urnă care conține N bile de aceeaşi mărime, dintre care a sunt albe şi b sunt negre. Din urnă se extrag succesiv n bile fără a se pune bila extrasă înapoi. Să se determine probabilitatea ca din cele n bile extrase, α să fie albe şi β negre. Evenimentul sigur E constă în formarea tuturor grupelor posibile cu cele N bile luate câte n, ele diferind prin natura bilelor. Mulțimea respectivă conține C_N^n elemente (cazuri egal posibile). Pentru a determina numărul cazurilor favorabile producerii evenimentului dorit vom asocia fiecărei grupe care conține α bile albe (în total C_a^α grupe) cu fiecare grupă care conține β bile negre (în total C_b^β grupe) obținând $C_a^\alpha . C_b^\beta$ cazuri favorabile. Folosind definiția clasică a probabilității avem:

(1) $$P_n(\alpha,\beta)=\frac{C_a^\alpha\cdot C_b^\beta}{C_N^n},$$ în care a+b=N şi α+ β=n.

Generalizarea problemei presupune că în urnă sunt a_k bile de culoare k, $k \in \{1,2,...,s\}$. Se extrag n bile. Care este probabilitatea ca x_k bile să fi de culoarea k ? Avem:

$$(2) \qquad P_n\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = \frac{C_{a_1}^{x_1} \cdot C_{a_2}^{x_2} ... C_{a_s}^{x_s}}{C_N^n}$$

unde

$$\sum_{k=1}^{s} a_k = N \text{ şi } \sum_{k=1}^{s} x_k = n.$$

Exemplu. Într-o grupă din anul I sunt 30 de studenți, dintre care 18 băieți şi 12 fete. Care este probabilitatea ca din 10 studenți ai grupei care vor pleca într-o excursie pe Litoral, 6 să fie băieți şi 4 fete?

Soluție. Aplicând formula (1) avem:

$$p = \frac{C_{18}^6 \cdot C_{12}^4}{C_{30}^{10}} = \frac{17 \cdot 4 \cdot 9}{29 \cdot 23} \cong 0{,}91$$

sau 91%.

4.2. Schema urnei cu bile revenite. Exemplu

Fie o urnă conținând bile albe şi negre. Notăm cu A evenimentul scoaterii unei bile albe, de probabilitate P(A)=p. Scoaterea unei bile negre reprezintă evenimentul contrar lui A, de probabilitate $P(\overline{A}) = q = 1 - p$. Se fac n extrageri succesive, introducându-se de fiecare dată în urmă bila extrasă. Aceasta face ca p să fie constant tot timpul experienței. Să se determine probabilitatea $P_n(x)$ ca x bile din cele n extrase să fie albe.

Fie

$$\underbrace{A \text{ şi } A \text{ şi} ... \text{şi } A}_{\text{de } x \text{ ori}} \text{ şi } \underbrace{\overline{A} \text{ şi } \overline{A} \text{ şi} ... \text{şi } \overline{A}}_{\text{de } n-x \text{ ori}}$$

O succesiune în care evenimentul A apare de x ori iar $\overline{A}$ de n-x ori. Probabilitatea unei astfel de succesiuni de evenimente independente este:

$$P\left[\underbrace{(A\cap A\cap\ldots\cap A)}_{de\,x\,ori}\cap\underbrace{(\overline{A}\cap\overline{A}\cap\ldots\overline{A})}_{de\,n-x\,ori}\right]=p^x\cdot q^{n-x}$$

Numărul succesiunilor distincte în care A apare de x ori şi $\overline{A}$ de (n-x) ori este evident C_n^x.

Probabilitatea $P_n(x)$ este dată de probabilitatea acestor succesiuni distincte. Cum aceste succesiuni sunt incompatibile şi echiprobabile, avem:

(3) $$P_n(x)=C_n^x\cdot p^x\cdot q^{n-x}\quad .$$

Exemplu. Din datele statistice probabilitatea evenimentului naşterii unei fete este p=p(F)=0,51, iar a evenimentului naşterii unui băiat este q=P(B)=0,49. Care este probabilitatea ca într-o familie cu 7 copii, 5 să fie fete?

Soluţie. Aplicând formula (3) avem:

$$P_7(5)=C_7^5\cdot 0{,}51^5\cdot 0{,}49^2=0{,}17.$$

Observaţie. Se observă că probabilitatea $P_n(x)$ din (3) este dată de coeficientul lui t^x din dezvoltarea binomului:

$$(pt+q)^n=\sum_{x=0}^{n}C_n^x\cdot p^x\cdot q^{n-x}\cdot t^x\,.$$

Pentru aceasta se mai spune că probabilitatea respectivă reprezintă o *lege binominală*.

Generalizare. Dacă o urnă conţine bile de culoare k (k=1,2, … ,s) şi se fac n extrageri succesive, punând de fiecare dată bila scoasă înapoi, cunoscând că probabilitatea scoaterii bilei de culoare k este p_k, se dovedeşte, că probabilitatea evenimentului ca din cele n bile extrase, x_k să fie de culoare k, k=1,2, … ,s este:

(4) $$P_n(x_1,x_2,\ldots,x_s)=\frac{n!}{x_1!x_2!\ldots x_k!}p_1^{x_1}\cdot p_2^{x_2}\ldots p_s^{x_s}$$

unde $x_s\geq 0,\ \sum_{k=1}^{s}x_k=n,\ \sum_{k=1}^{s}p_k=1$, iar probabilitatea respectivă defineşte o *lege multinominală.*

Observaţie. Cele două scheme probabilistice, date de urna cu bile revenite şi de urna cu bile nerevenite, reprezintă în practică două tipuri de selecţii, *selecţie*

repetată, respectiv, *selecție nerepetată*, obținute prin sondaj non-exhaustiv, respectiv *sondaj exhaustiv.*

4.3. Schema urnelor Poisson*. Exemplu

Schema lui Poisson constă în a considera n urne U_k, k=1,2, … ,n neidentice, ceea ce revine a considera pentru fiecare eveniment A realizat din urna U_k, probabilitățile diferite $p_k=P(A/U_k)$, $k\in\{1,2,...,n\}$.

Probabilitatea ca evenimentul A să se realizeze în cele n extracții (de scoaterea a unei bile din fiecare urnă) de x ori, şi $\overline{A}$ de n-x ori este dată de coeficientul lui t^x din dezvoltarea polinomului

$$Q(t)=(p_1t+q_1)(p_2t+q_2)...(p_nt+q_n).$$

Exemplu. O urnă conține 5 bile albe şi trei negre, o altă urnă şase albe şi două negre şi a treia, şapte albe şi una neagră.

Se extrage câte o bilă din fiecare urnă.Să se determine probabilitatea ca două bile să fie albe şi una neagră.

Soluție. Aplicând schema lui Poisson găsim că probabilitatea de a extrage două bile albe şi una neagră este dată de coeficientul lui t^2 din produsul:

$$Q(t)=\left(\frac{5}{8}t+\frac{3}{8}\right)\left(\frac{6}{8}t+\frac{2}{8}\right)\left(\frac{7}{8}t+\frac{1}{8}\right).$$

Aşadar :

$$p=\frac{30}{8^3}+\frac{70}{8^3}+\frac{126}{8^3}\ \text{sau}\ \ p\cong 0{,}44.$$

5. Variabile aleatoare.

5.1. Introducere. Variabile aleatoare. Distribuția unei variabile aleatoare.

Studiul evenimentelor aleatoare şi chiar al probabilităților respective, a prezenatat cu deosebire caracteristca calitativă a experiențelor ce conduc la realizarea lor. Dar fenomenele sau proprietățile ce generează experiențele pot fi atât cantitative cât şi calitative. În viața de toate zilele întâlnim la tot pasul măsuri

care se schimbă sub influența unor factori întâmplători. Aşa sunt de exemplu: numărul de zile dintr-un an în care cade ploaia, numărul de puncte care apare în aruncarea unui zar, masa unui bob de grâu luată dintr-o anumită recoltă, cererea unui produs într-o unitate de timp (zi, lună, etc.), valoarea vânzărilor unui magazin pe unitatea de timp, numărul pacienților care solicită serviciul unei policlinici etc. măsurile care se iau la întâmplare sunt legate de anumite experiențe aleatoare. O astfel de mărime legată de experiența aleatoare şi care ia valori la întâmplare, în funcție de rezultatele experienței, se numeşte *variabilă aleatoare (stochastică).*

Fie $S=(E_1, E_2, \dots , E_n)$ un sistem complet de evenimente ale câmpului finit F. Evenimentele E_i sunt elementare şi într-o experiență apare unul singur. Aceste evenimente verifică condițiile: $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i,\ E_i \cap E_j = \Phi,\ i \neq j$. Notăm $p_i = P(E_i)$; evident $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Putem enunța:

Definiția 1. Se numeşte *variabilă aleatoare* aplicațiaX: $S \to R$. Valoarea variabilei X corespunzătoare evenimentului $E_i \in S$ se va nota $X(E_i)=x_i$ cu probabilitatea $P(X=x_i)=p_i$.

Variabilele aleatoare se clasifică după mulțimile pe care sunt definite. Astfel avem:

- *variabilă aleatoare discretă* definită pe o mulțime cel mult numărabilă de evenimente;
- *variabilă aleatoare continuă* definită pe o mulțime continuă.

O variabilă aleatoare discretă o vom nota:

(1) $$X : \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \dots & ,x_n \\ p_1, & p_2, & \dots & ,p_n \end{pmatrix} \text{ sau } X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix},\ i = \overline{1,n}$$

unde în primul rând al tabloului am trecut valorile posibile ale variabilei şi sub fiecare valoare probabilitatea cu care X ia această valoare. Tabloul (1) defineşte *distribuția* sau *repartiția* variabilei X.

O variabilă aleatoare continuă o vom nota:

(2) $$X : \begin{pmatrix} x \\ \varphi(x) \end{pmatrix}, x \in [a,b]$$

unde: φ(x) se numeşte densitate de probabilitate şi are proprietățile:

$\varphi(x) \geq 0, x \in [a,b]$ şi $\int_a^b \varphi(x)dx = 1$.

Exemplu: (variabilă aleatoare discretă). Fie E_i, $i = \overline{1,6}$ E_i=(i), $i = \overline{1,6}$, evenimentul care constă în apariția feței cu i puncte la o anumită aruncare; $p_i = \frac{1}{6}$, $i = \overline{1,6}$ iar distribuția va fi:

$$X : \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \\ \frac{1}{6}, & \frac{1}{6}, & \frac{1}{6}, & \frac{1}{6}, & \frac{1}{6}, & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Deoarece $p_1 = p_2 = ... p_6 = \frac{1}{6}$, spunem că X are o *distribuție uniformă.*

<u>*5.2. Operații cu variabile aleatoare*</u>

Fie X şi Y două variabile aleatoare definite respectiv pe sistemele complete de evenimente S_1 şi S_2 ale aceluiaşi câmp $\Im$ şi având repartițiile:

$$X : \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \cdots & , x_n \\ p_1, & p_2, & \cdots & , p_n \end{pmatrix}, Y : \begin{pmatrix} y_1, & y_2, & \cdots & , y_m \\ q_1, & q_2, & \cdots & , q_m \end{pmatrix}$$

<u>Definiții.</u>

1^0. Prin produsul dintre constanta k∈R şi variabila aleatoare X se înțelege o nouă variabilă aleatoare kX şi având repartiția:

(3) $$k \cdot X : \begin{pmatrix} kx_1, & kx_2, & \cdots & , kx_n \\ p_1, & p_2, & \cdots & , p_n \end{pmatrix}$$

2^0 Se numeşte sumă a variabilelor aleatoare X şi Y variabila aleatoare Z=X+Y, având repartiția:

(4) $$X + Y : \begin{pmatrix} x_i + y_j \\ p_{ij} \end{pmatrix}, \ i = \overline{1,n}, \ j = \overline{1,m}$$

unde p_{ij} reprezintă probabilitatea realizării simultane a evenimentelor $X=x_i$ şi $Y=y_j$, adică $p_{ij}=P(X=x_I \text{ şi } Y=y_j)$.

Are loc:

Proprietatea. Dacă $p_i=p(A_i)$, $A_i\in S_1$ şi $q_j=P(B_j)$, $B_j\in S_2$, atunci $p_{ij}=P(A_i\cap B_j)$ şi au loc relaţiile $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p_{ij}=1$, $\sum_{i=1}^{n}p_{ij}=q_j$, $\sum_{j=1}^{m}p_{ij}=p_i$.

3^0 Numim *produs* al variabilelor aleatoare X şi Y variabila aleatoare Z=X Y având repartiţia:

(5) $$X\cdot Y:\begin{pmatrix} x_i\cdot y_j \\ p_{ij}\end{pmatrix},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}$$

unde $p_{ij}=P(A_1\cap B_j)$ şi $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p_{ij}=1$,

5.3. Funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare.

Se numeşte funcţie de repartiţie a variabilei aleatoare X funcţia:

$$F(x)=P(X<x),$$

constituind o caracteristică pentru orice variabilă aleatoare. Calculul efectiv al funcţiei de repartiţie se adaptează celor două tipuri de variabile aleatoare.

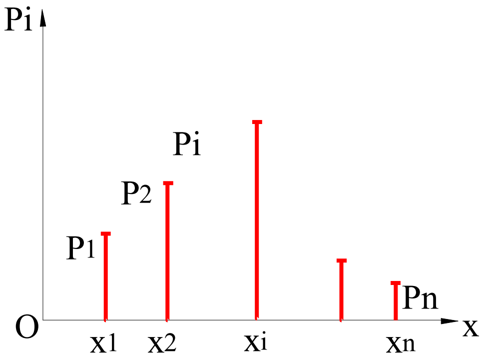
a) *Variabila aleatoare discretă*.

Evenimentul (X<x) este reuniunea evenimentelor ($X=x_i$), până la cel mai mare argument $x_i\le x$, adică: $(X<x)=\bigcup_{i=1}^{x_i\le x}(X=x_i)$. Evenimentele ($X=x_i$) fiind incompatibile, aplicând $x_i\le$ x operatorul de probabilitate asupra relaţiei precedente, obţinem:

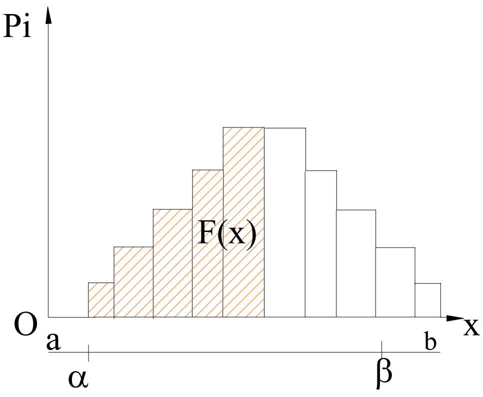
$$P(X<x)=\sum_{x_i\le x}P(X=x_i)=\sum_{x_i\le x}p_i \text{ ,deci:}$$

(1) $$F(x)=\sum_{x_i\le x}p_i .$$

Considerând graficele repartiţiei variabilei aleatoare, discrete, funcţia de repartiţie F(x) este suma probabilităţilor p_i de la stânga punctului de abscisă x (fig.a) sau *suprafaţa histogramei* de la stânga punctului de abscisă b (fig.b). (funcţia de repartiţie este numită şi funcţia cumulativă a probabilităţilor):



a)



b)

Din graficul b) observăm că:

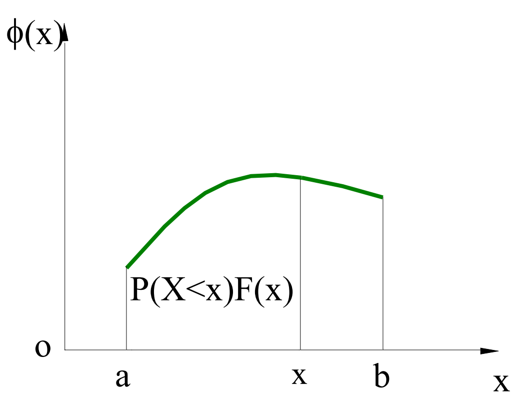
(2) $$P(\alpha \leq X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$$

b) <u>Variabila aleatoare continuă.</u>

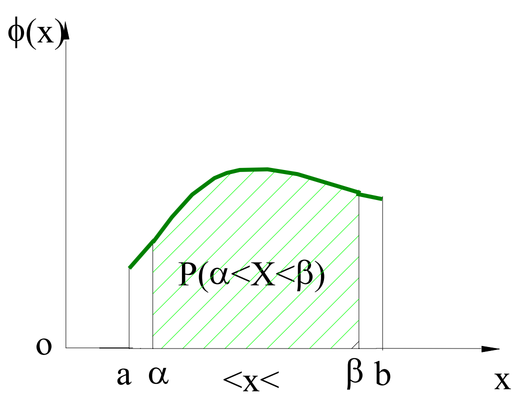
Dacă X este o variabilă aleatoare continuă, funcția de repartiție se defineşte astfel:

(3) $$P(X < x) = F(x) = \int_a^x \varphi(t)dt$$

Ținând cont de interpretarea geometrică a integralei definite rezultă că funcția F(x) reprezintă aria din histogramă pe intervalul [a,x]; (fig.a)



a)



b)

şi în acest caz rămâne valabilă formula (3); în fig. b) relația (3) reflectă formula de calcul a unei integrale definite pe intervalul $[\alpha,\beta]$.

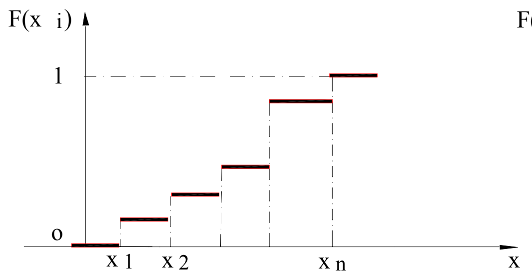
Funcția de repartiție F(x)=P(X<x) are următoarele proprietăți:

1^0 $0 \leq F(x) \leq 1$, ceea ce rezultă din faptul că F(x) reprezintă probabilitatea P(X<x);

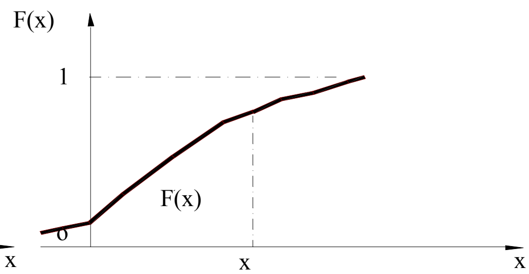
2^0 Funcția F(x) este nedescrescătoare, adică din $x_1 \leq x_2$ rezultă $F(x_1) \leq F(x_2)$.

3^0 F(a)=0, F(b)=1, unde a şi b sunt cea mai mică, respectiv cea mai mare valoare pe care o poate lua argumentul variabilei X (evenimentul X<a este imposibil, iar X<b este sigur).

Pentru variabila aleatoare discretă, funcția F(x) este continuă în acest interval şi este discontinuă la extremitățile intervalului; graficul (fig.a de mai jos) este numit *în scară*, iar salturile de la o treaptă la cea consecutivă sunt egale cu p_i. Funcția de repartiție a unei variabile aleatoare continue este, de asemenea o funcție continuă (fig.b):



a)



b)

Observație. Pentru funcția de repartiție F(x) se obişnuieşte a se considera drept domeniu de definiție toată mulțimea numerelor reale.

În acest caz avem relații de forma:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt, \ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1, \ F(-\infty) = 0 \text{ şi } F(+\infty) = 1.$$

6. Caracteristici ale variabilei aleatoare.

În prezența unor mulțimi de numere, acestea reprezentând valorile argumentului unei variabile aleatoare în corespondență cu probabilitățile respective, se pune problema de a sintetiza aceste mulțimi numerice, prin câteva date numerice, care să aibă proprietatea de a reprezenta cât mai fidel variabila aleatoare considerată. O astfel de reducere a mai multor date numerice la cât mai puține numere, devine absolut necesară, mai ales atunci când se urmărește compararea între ele a diferite fenomene sau proprietăți generând variabile aleatoare.

Pentru sistematizarea prezentării acestor caracteristici, le vom grupa după nota dominantă pe care o pun în evidență: tendința centrală de grupare; împrăştierea distribuției.

6.1 Tendința centrală de grupare a distribuției.

În practica aplicațiilor în economie drept indicatori numerici ai tendinței centrale de grupare, sunt frecvent folosiți: valoarea medie, mediană, modul etc.

a) Valoarea medie. Se numeşte *valoare medie* (sau speranța matematică) a unei variabile aleatoare X numărul (M=M(X)):

(1) $$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$ (X variabilă discretă)

(2) $$M(X)=\int_a^b x\varphi(x)dx$$ (X variabilă continuă)

Observăm că valoarea medie a variabilei X (discretă) este media ponderată a valorilor sale, cu ponderile p_1, p_2, … ,p_n , $M(X)=\frac{p_1x_1+p_2x_2+...+p_nx_n}{p_1+p_2+...+p_n}$. Valoarea medie se notează şi cu $\overline{x}=M(X)$.

Au loc:

Propoziția 1. Fie variabilele aleatoare X şi Y, atunci au loc relațiile:

(3) $$\begin{cases} M(X+Y)=M(X)+M(Y) \\ M(kX)=kM(X), \quad k \in R \end{cases}$$

Demonstrație. Conform definiției valorii medii a unei variabile aleatoare avem:

$$M(X+Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij}\left(x_i+y_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij}x_i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij}y_j=$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} p_{ij}+\sum_{i=1}^{m} y_j \sum_{j=1}^{n} p_{ij}=\sum_{i=1}^{m} x_i p_i+\sum_{j=1}^{m} y_j q_j=M(X)+M(Y)$$

şi

$$M(kX)=\sum_{i=1}^{n}(kx_i)p_i=k\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i p_i=kM(X)$$

Propoziția 2. Fie X şi Y două variabile independente.

Atunci:

(4) $$M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y) .$$

Într-adevăr, putem scrie:

$$M(X\cdot Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij}\cdot x_i\cdot y_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_i\cdot q_j\cdot x_i\cdot y_j=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \sum_{j=1}^{m} p_j y_j=M(X)\cdot M(Y)$$

$p_{ij}=p_i q_j$ (X,Y independente)

Observație.

Valoarea medie este un fel de valoare centrală în jurul căreia cad celelalte valori posibile.

Dacă $x\in(-\infty,+\infty)$ atunci:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx .$$

b) Valoarea mediană.

Se numeşte *mediana* variabilei aleatoare X, numărul M_e, care satisface ecuația:

(5) $P(X<M_e)=P(X>M_e)$.

Cu ajutorul funcției de repartiție F(x), relația (5) se mai scrie:

$F(M_e)=1-F(M_e)$ sau $2F(M_e)=1$.

Rezultă deci că mediana M_e este soluția ecuației:

(6) $$F(x)=\frac{1}{2}\ .$$

În cazul unei variabile aleatoare continue, mediana este determinată de ecuația:

$$\int_0^{M_e}\varphi(x)dx=\frac{1}{2}\,.$$

Dacă F(x) este continuă crescătoare soluția acesteia este unică.

Exemplu: Să se determine mediana variabilei aleatoare continue:

$$X:\begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{12}(2x+1)\end{pmatrix},\quad 0\le x\le 3\,.$$

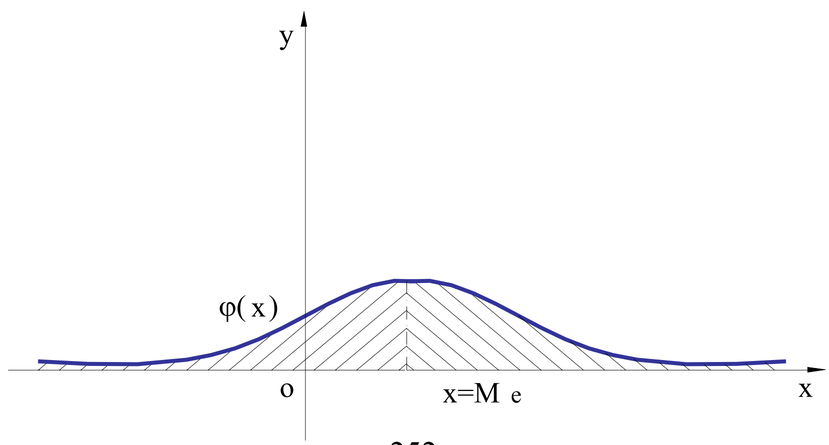
<u>Soluție.</u> Calculele sunt:

$$\int_0^{M_e}\frac{1}{12}(2x+1)dx=\frac{1}{12}\left(M_e^2+M_e\right);\frac{1}{12}\left(M_e^2+M_e\right)=\frac{1}{2}$$

cu soluțiile M_e=-3 şi M_e=2. Convine $M_e=2\ \in[0,3]$.

c) *<u>Moda (valoarea cea mai probabilă).</u>* Se numeşte *moda* variabilei aleatoare X , acea valoare M_0 a variabilei X pentru care funcția densitate de probabilitate are valoarea maximă. Astfel dacă funcția densitate de probabilitate φ(x) este derivabilă de două ori atunci moda M_0 verifică relațiile $\varphi'(M_0)=0$; $\varphi''(M_0)<0$. În cazul când X este o variabilă aleatoare de tip discret $X:\begin{pmatrix} x_i \\ p_i\end{pmatrix}$ i $i\in\{1,2,...,n\}$, moda reprezintă valoarea x_i, pentru care p_i este maximă.

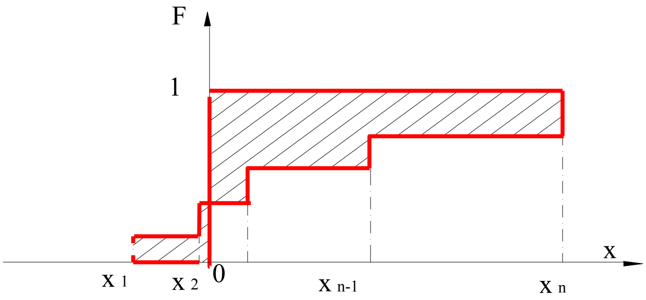
1) Geometric M_e este numărul cu proprietatea că $x=M_e$ împarte aria cuprinsă între graficul funcției φ(x) şi axa Ox în două părți egale:

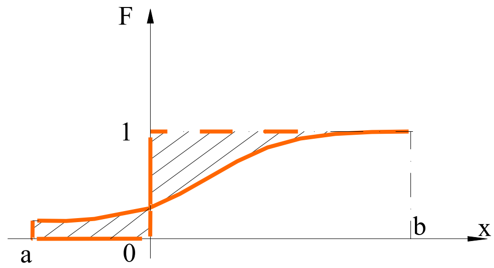


2) Între cei trei indicatori numerici M, M_e, M_0 nu există o relație determinată. Dacă este, de exemplu cu distribuție simetrică atunci M= M_e = M_0.

3) Noțiunea de mediană se generalizează, astfel: rădăcinile ecuației $F(x)=\frac{i}{n}$, i=1,2, … ,n-1 se numesc *quantile* de ordinul n. pentru n=2, i=1 este quantila de ordinul doi, tocmai mediana. Pentru n=4 se obțin *quartile*. Quantilele de ordinul zece (n=10) sunt numite *decile*, iar cele de ordinul o sută (n=100) *centile*.

4) Valoarea medie a unei variabile reprezintă aria haşurată de mai jos:





d) Momente şi medii de ordin superior.

Se numeşte *momentul de ordinul k* al variabilei X expresia:

(7) $$M_k=\sum_{i=1}^{n}x_i^k p_i$$ pentru variabila discretă;

(8) $$M_k=\int_{-\infty}^{+\infty}x^k\cdot\varphi(x)dx$$ pentru variabila continuă.

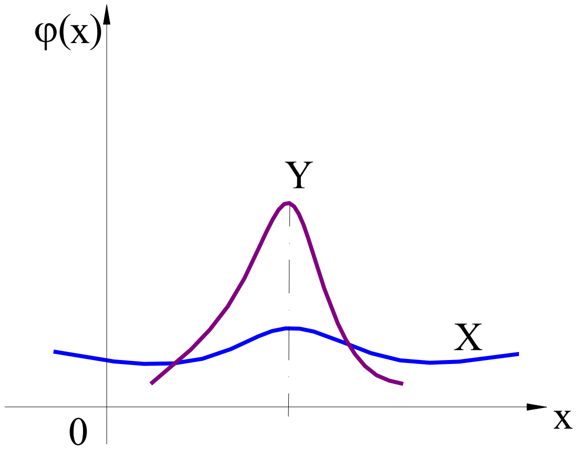
Se numeşte *medie de ordinul k* a variabilei X expresia:

(9) $$\mu_k=\sqrt[k]{M_k}\quad .$$

6.2 Împrăştierea distribuției variabilei aleatoare.

Caracteristicile numerice ale tendinței centrale de grupare nu dau nici o indicație asupra împrăştierii, respectiv a concentrațiilor valorilor variabilei, adică în ce măsură datele se abat între ele, drept consecință în ce măsură se abat de la poziția centrului de grupare.

De exemplu dacă X şi Y sunt două variabile aleatoare simetrice, evident centrele lor de grupare coincid, deşi distribuțiile lor sunt substanțial diferite, variabila X având valorile mai împrăştiate decât variabila Y (sau invers variabila Y mai concentrate ca X):



Sunt deci necesare caracteristici numerice care să permită să se compare între ele împrăştierea, respectiv concentrarea distribuțiilor pentru diferite variabile aleatoare.

Printre acestea se foloseşte: extinderea sau intervalul de variație, abaterea, abaterea absolută medie, dispersia, abaterea medie pătratică, coeficientul de variație, momente centrate, covarianța, coeficient de împrăştiere etc.

a) <u>Extinderea sau interval de variație</u>. Dacă a şi b sunt cea mai mică, respectiv cea mai mare valoare a argumentului variabilei, atunci *extinderea* este prin definiție:

(1) $\omega=b-a$ sau $\omega=x_{max}-x_{min}$

Extinderea este folosită în statistica controlului de fabricație în serie.

b) <u>Abaterea. Abaterea absolută medie</u>. Dacă α este o valoare oarecare din intervalul de variație al unei variabile aleatoare X, prin *abatere* a variabilei X înțelegem variabila:

$$Y:\begin{pmatrix} x_i-\alpha \\ p_i \end{pmatrix} \text{ sau } Y:\begin{pmatrix} x-\alpha \\ \varphi(x) \end{pmatrix}$$

De obicei ca valoare pentru α se ia valoarea medie m=M(X), sau mediana M_e.

Considerând variabila aleatoare $U:\begin{pmatrix} |x_i - m| \\ p_i \end{pmatrix}$ vom obține abaterea absolută medie dată de expresiile:

(2) $\sum_{i=1}^{n} |x_i - m| \cdot p_i$ sau $\int_{-\infty}^{+\infty} |x - m| \varphi(x) dx$.

Care poate caracteriza împrăştierea variabilei aleatoare X în jurul valorii ei medii m.

c) *<u>Dispersia. Abaterea medie pătratică</u>*. Abaterea medie absolută definită mai sus, aparent simplă ca definiție, prezintă dezavantajul de a fi în cele mai dese cazuri, greu de calculat, fiind vorba de valorile absolute ale argumentului abaterii. Există însă un alt mod de a ține seama de valorile absolute ale abaterii asociind variabila:

$$U^2 : \begin{pmatrix} (x - m)^2 \\ \varphi(x) \end{pmatrix}.$$

<u>Definiție.</u> Valoarea medie a acestei variabile adică expresia M (U^2) se numeşte *dispersia* variabilei aleatoare inițiale X. Vom nota dispersia cu

$$\sigma^2 \overset{sau}{=} D(X) \overset{def}{=} M\left(U^2\right) = M\left[(X - M(X))^2\right].$$

Când variabila X este discretă, avem:

(3) $D(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - m\right)^2 \cdot p_i$

iar când variabila X este continuă, avem:

(4) $D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 \cdot \varphi(x) dx$.

Numărul $\sigma = \sqrt{D(X)}$ se numeşte *abaterea medie pătratică* a variabilei X sau *abaterea medie tip (standard).*

Dispersia şi abaterea medie pătratică sunt indicatorii cei mai utilizați pentru a caracteriza împrăştierea valorilor unei variabile aleatoare. Are loc următoarea:

Teoremă. Fie X şi Y două variabile aleatoare independente ($p_{ij}=p_i\ q_j$). Atunci:

(5) $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

şi

(6) $D(k\,X)=k^2\,D(X),\quad \forall\ k\in R.$

Demonstraţie. Notăm cu U, V, W, respectiv, abaterile variabilelor aleatoare X, Y, X+Y; observăm că: U=X-M(X), V=Y-M(Y), W=X+Y-M(X+Y). Deoarece variabilele aleatoare X şi Y sunt independente, avem:

$$W=X-M\,(X)+Y-M\,(Y).$$

Pentru valorile abaterilor variabilelor aleatoare U,V, W obţinem:

$$u_i=x_i-M\,(X),\ v_i=y_i-M\,(Y),\ w_{ij}=u_i+v_j.$$

Conform definiţiei dispersiei avem:

$$D(X+Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p_{ij}w_{ij}^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p_iq_j\left(u_i+v_j\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p_iq_j\left(u_i^2+v_j^2+2u_iv_j\right)$$

Ţinând seamă de relaţiile:

$$M\,(U)=0,\ M\,(V)=0,\quad \sum_{j=1}^{m}q_j=\sum_{i=1}^{n}p_i=1$$

din relaţia precedentă avem:

$$D(X+Y)=\sum_{j=1}^{m}q_j\sum_{i=1}^{n}p_iu_i^2+\sum_{i=1}^{n}p_i\sum_{j=1}^{m}q_jv_j^2+2\sum_{i=1}^{n}p_iu_i+\sum_{j=1}^{m}q_jv_j$$

=D(X)+D(Y), adică relaţia (5).

În ce priveşte relaţia (6) observăm că:

$$D(k\cdot X)=\sum_{i=1}^{n}p_i\left(kx_i-kM(X)\right)^2=k^2D(X).$$

d) *Momente centrate*. Variabila X-M (X), realizează o translaţie mutând originea argumentului în centrul de grupare m=M (X), adică abaterea X-m centrează variabila considerată X. în acest sens momentele abaterii şi mediile respective de ordinul k, se numesc *momente centrate* m_k, respectiv *medii centrate* μ_k (de ordinul k) şi se definesc astfel:

(7) $m_k = \sum_{i=1}^{k} (x_i - m)^k p_i,\ m_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^k \varphi(x) dx.$

Se observă că:

$$m_2 = D\ (X),\ \sigma = \mu_2 = \sqrt{m_2}\ .$$

Pentru calculul momentelor centrate de diferite ordine folosim de obicei legătura cu momentele obişnuite. Astfel ținând seama că am notat cu litere mici m_k momentele centrate şi cu litere mari M_k, momentele obişnuite, avem:

$$m_k = \sum_{i=1}^{k} (x_i - m)^k p_i,\ M_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i$$

Dezvoltând $(x_i\text{-}m)^k$ după binomul lui Newton, obținem:

$$m_k = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \cdot C_k^j x_i^{k-j} \cdot m^j p_i\ .$$

Cum avem:

$$m = M_1\ ,\ \sum_{i=1}^{n} x_i^{k-j} p_i = M_{k-j}, j \in \{0,1,2,...k\}$$

(M_0=1) relația precedentă conduce la exprimarea momentelor centrate în funcție de momentele obişnuite:

(8) $$\begin{cases} m_k = M_k - C_k^1 M_{k-1} + C_k^2 M_{k-2} ... M_1^2 + ... + \\ + (-1)^s C_k^s M_{k-s} \cdot M_1^s + ... + (-1)^k \cdot M_1^k \end{cases} .$$

Particularizând pe k şi ținând seama că M_0=1, se găsesc momentele centrate de diferite ordine:

(9) $m_0 = 1, m_1 = 0, m_2 = M_2 - M_1^2, m_3 = M_3 - 3M_2M_1 + 2M_1^3$, etc.

e) <u>Covarianța</u>. Fiind date două variabile X şi Y, se defineşte *covarianța* lor, notându-se cov (X,Y)=$\sigma_{x,y}$, expresia:

(10) σ_{xy}=M[(X-m_x) (Y-m_y)]

adică un *moment centrat mixt* al celor două variabile unde m_x=M(X), m_y=M(Y). Dezvoltând (10) se obține formula echivalentă de calcul:

(11) σ_{xy}=M (X Y)-M (X) M (Y).

f) <u>*Coeficient de împrăştiere*</u> se defineşte ca fiind raportul: $V=\frac{\sigma}{m}$.

7. Funcția caracteristică ataşată unei variabile aleatoare.

Pentru dovedirea unor proprietăți sau calcul mai uşor în unele exemple a caracteristicilor variabililor aleatoare, sunt utile anumite funcții ce pot fi ataşate unei variabile aleatoare dintre care prezentăm funcția caracteristică.

Definiție. Se numeşte *funcție caracteristică*, a variabilei aleatoare X, valoarea medie a unei noi variabile aleatoare, obținute din X, înlocuind argumentul ei x prin e^{ixt}, unde i este unitatea imaginară, iar t este un parametru real. Notând funcția caracteristică cu c(t), avem:

$$(1)\qquad c(t)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{\infty} p_k e^{itx_k}, & \text{dacă X este distributie discreta}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\varphi(x)dx, & \text{dacă } X \text{ are distributie continuă cu densitatea } \varphi(x)\end{cases}$$

Are loc următoarea:

Teoremă. Funcția caracteristică admite următoarea dezvoltare în serie:

$$(2)\qquad c(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^k M(X^k)}{k!}t^k$$

unde $M(X^k)=M_k$ este momentul de ordinul k al variabilei X. Relația (2) se obține uşor dacă înlocuim în (1) pe e^{itx} cu dezvoltarea:

$$e^{itx}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^k x^k}{k!}t^k .$$

Egalitatea (2) permite adesea să se calculeze mai uşor momentele de diferite ordine ale variabilei X. Se dezvoltă în serie funcția caracteristică c(t), $c(t)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k t^k$ şi momentul de ordinul k este:

$$(3)\qquad M_k=\frac{k!}{i^k}c_k=\frac{1}{i^k}\left[\frac{d^k c(t)}{dt^k}\right]_{t=0} .$$

Dacă repartiția variabilei X este de tip continuu, densitatea sa de repartiție φ(x) este dată de :

(4) $$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}c(t)dt \quad .$$

8. Inegalitatea Bienayme – Cebâşev

Pentru orice variabilă aleatoare are loc inegalitatea:

(1) $$P(|X-m|<\varepsilon)\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}, \varepsilon>0 \text{ arbitrar, } m=M(X), \sigma^2=D(X).$$

Vom demonstra (1) pentru cazul când X este variabilă aleatoare continuă. Dacă φ(x) este densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare X atuci:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m)^2\varphi(x)dx\geq \int_{|x-m|\geq\varepsilon}(x-m)^2\varphi(x)dx\geq \varepsilon^2\int_{|x-m|\geq\varepsilon}\varphi(x)dx=\varepsilon^2\cdot P(|X-m|\geq\varepsilon)$$

de unde rezultă:

(2) $$P(|X-m|\geq\varepsilon)\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2} \text{ sau } P(|X-m|<\varepsilon)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Luând ε=kσ, k∈N şi $\sigma=\sqrt{D(X)}$, avem: $\frac{D(x)}{\varepsilon^2}=\frac{\sigma^2}{k^2\sigma^2}=\frac{1}{k^2}$ iar inegalitatea lui Bienayme-Cebâşev sub cele două forme date de (2) se scrie:

(3) $$P(|X-m|\geq k\sigma)\leq\frac{1}{k^2} \text{ respectiv } P(|X-m|<k\sigma)\geq 1-\frac{1}{k^2}$$

pentru k=1, relația este nesemnificativă dând rezultat banal, de aceea vom lua k>1.

Exemplu: Pentru k=3, avem:

$$P(|X-m|\geq 3\sigma)\leq\frac{1}{9}\cong 0{,}1 \textit{ sau } P(|X-m|<3\sigma)\geq\frac{8}{9}\cong 0{,}9$$

Pentru k=4, avem:

$$P(|X-m|<4\sigma)<\frac{1}{16}\cong 0{,}06$$

Constatăm că abaterile mai mari decât 3σ şi cu atât mai mult decât 4σ, au probabilităţile de realizare foarte mici, deci şansele acestor evenimente de a se produce sunt extrem de reduse.

9. Distribuţii clasice

Dintre variabilele aleatoare unele au o importanţă deosebită fie că sunt folosite cu o pondere mare în cercetarea fenomenelor sau proprietăţilor pe care practica îndeosebi le pune.

9.1 Distribuţia binominală.

Să considerăm o urnă care conţine a bile albe şi b bile negre. Repartiţia variabilei aleatoare X:

$$(1) \qquad X:\begin{pmatrix} 0, & 1, & \ldots & , k & ,\ldots, & n \\ \\ q^n, & C_n^1 pq^{n-1}, & \ldots & ,C_n^k p^k q^{n-k} & ,\ldots, & p^n \end{pmatrix}$$

care constă în n extracţii să apară o bilă albă de k ori, se numeşte distribuţie (repartiţie) *binominală* (sau repartiţia lui Bernoulli) $\left(p=\dfrac{a}{a+b}, q=1-p\right)$.

Observăm că probabilităţile celor n+1 valori sunt termenii dezvoltării

$$(p+q)^n = C_n^0 p^0 q^n + C_n^1 p^1 q^{n-1} + \ldots + C_n^n p^n q^0$$

de unde şi numele de lege sau distribuţie binominală. Observăm de asemenea că funcţia de probabilitate $\varphi(x_k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ verifică:

$$\varphi(x_k) \geq 0 \text{ si } \sum_{k=0}^{n} \varphi(x_k) = 1$$

(cea de-a doua se obţine imediat din dezvoltarea $(p+q)^n=1$).

În cazul legii binominale funcţia caracteristică este:

$$c(t) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} \cdot e^{itk} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(pe^{it}\right)^k q^{n-k}$$

deci:

(2) $$c(t)=\left(pe^{it}+q\right)^{n}.$$

Cu ajutorul funcției caracteristice c(t) obținem valoare medie:

$$M(X)=\frac{1}{i}\left[\frac{dc(t)}{dt}\right]_{t=0}=\frac{1}{i}npi$$

sau

(3) $$M(X)=np;$$

apoi ,

$$M\left(X^2\right)=\frac{1}{i^2}\left[\frac{d^2c(t)}{dt^2}\right]_{t=0},$$

unde:

$$\frac{d^2c(t)}{dt^2}=n(n-1)\left(pe^{it}+q\right)^{n-2}p^2i^2e^{2it}+n\left(pe^{it}+q\right)^{n-1}p\cdot i^2e^{it}\ .$$

Înlocuind t=0 şi ținând seama că p+q=1, obținem:

$$M(X^2)=n^2p^2+np-np^2.$$

Rezultă:

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=np-np^2=np(1-p)=npq\ .$$

Aşadar, dispersia unei variabile aleatoare cu distribuția binominală este:

(4) $$D(X)=npq\ .$$

9.2 Distribuția normală (Laplace şi Gauss).

În studiul multor fenomene de masă se întâlnesc variabile aleatoare care se supun unei legi de probabilitate, numită *legea normală*.

Definiție. Spunem că o variabilă aleatoare X are *distribuție normală* sau că urmează *legea normală* cu parametrii m şi σ dacă densitatea sa de repartiție este:

(1) $$\varphi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$, unde $x\in R$, $\sigma>0$, $m\in R$.

Legea normală sau distribuția normală se numeşte şi legea lui Laplace şi Gauss şi densitatea de repartiție se mai notează cu n(x;m;σ). Printre distribuțiile discrete care se apropie de o lege normală este şi distribuția binominală în cazul când numărul probelor este foarte mare. Observăm că pentru orice $x\in R$ avem $\varphi(x)\geq 0$. Efectuând schimbarea de variabilă x-m=$\sigma\sqrt{2}$, obținem:

$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi}=1$, deoarece $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$ (integrala lui Poisson).

În consecință, cele două condiții ale densității de repartiție sunt îndeplinite de φ(x). Are loc:

Teorema. Funcția caracteristică a unei variabile aleatoare X supusă unei distribuții normale n(x,m,σ) este: $c(t)=e^{imt-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$.

Într-adevăr:

$$c(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\cdot\varphi(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}e^{itx}dx.$$

În această integrală facem schimbarea de variabilă x-m=y şi obținem:

$$c(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{imt}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot y^2}e^{ity}dy.$$

Înlocuim e^{ity}=costy+isinty şi obținem:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot y^2}e^{ity}dy=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}y^2}\cos ty\,dy+i\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}y^2}\sin ty\,dy=$$

$$=2\int_{0}^{\infty}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}y^2}\cos ty\,dy\cdot\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}y^2}\sin ty\,dy=0\right)(\text{impara}).$$

Folosind un rezultat cunoscut (integrala Poisson):

$\int_{0}^{\infty}e^{-ax^2}\cos bx\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}$, $a>0$ obținem: $\left(a=\frac{1}{2\sigma^2}, b=t\right)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot y^2} e^{ity}\,dy = \sigma\sqrt{2\pi}\cdot e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \text{ si deci } c(t) = e^{imt-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

Semnificația parametrilor m şi σ este următoarea: m este valoarea medie a variabilei aleatoare X, iar σ^2 este dispersia acestei variabile. Folosind funcția caracteristică, valoarea medie şi dispersia variabilei aleatoare X supusă legii normale se calculează uşor.

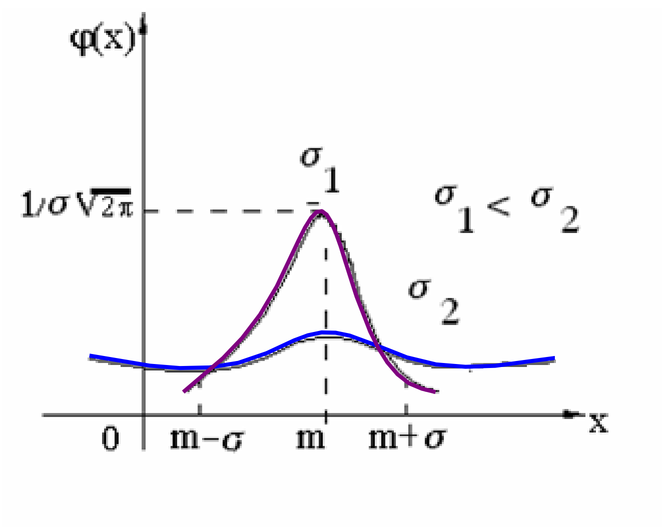
Într-adevăr:

$$M(X) = \frac{1}{i}\left[\frac{dc(t)}{dt}\right]_{t=0} = \frac{1}{i}\left[\left(im - \sigma^2 t\right)c(t)\right]_{t=0} = m \quad (c(0)=1) \text{ şi}$$

$$M\left(X^2\right) = \frac{1}{i^2}\left[\frac{d^2c(t)}{dt^2}\right]_{t=0} = -\left[\left(-\sigma^2 + \left(im - \sigma^2 t\right)^2\right)c(t)\right]_{t=0} = \sigma^2 + m^2 \text{ de unde}$$

$$D(X) = M\left(X^2\right) - [M(X)]^2 = \sigma^2$$

Graficul funcției φ(x) se numeşte curba normală (clopotul lui Gauss) cu parametrii m şi σ şi are formă de clopot



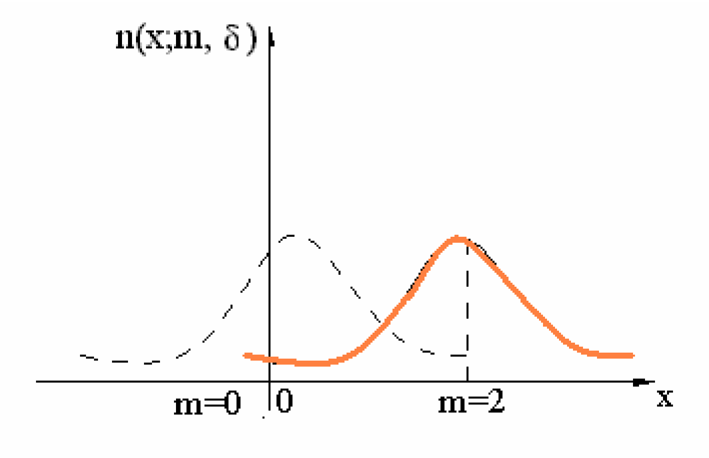
1) Toate curbele admit câte un punct de maxim x=m (a cărei valoare este $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$) şi scad necontenit la stânga şi la dreapta lui, apropiindu-se de axa absciselor.

2) Dreapta x=m este o axă de simetrie a graficului curbelor y=φ(x).

3) Toate curbele au formă de clopot, având formă convexă pentru $x \in (-\infty, m-\sigma) \cup (m+\sigma, \infty)$ şi concavă pentru $x \in (m-\sigma,\ m+\sigma)$.Punctele $m \pm \sigma$ sunt

puncte de inflexiune. Cu cât σ este mai mic, cu atât clopotul este mai ascuțit iar cu cât σ este mai mare cu atât clopotul este mau turtit. Suprafața inclusă de axa Ox este de arie 1 u^2, curba se apropie repede de axa Ox, în raport cu o abatere $|\xi| = |x - m| < 3\sigma$, diferența față de Ox este de ordinul 0,003 unități. Pentru aceasta din punct de vedere practic, distribuția poate fi considerată definită într-un interval finit.

4) Față de parametrul m, curbele n(x;m;σ)suferă translații de-a lungul axei Ox, menținându-şi forma şi mărimea (σ constant):



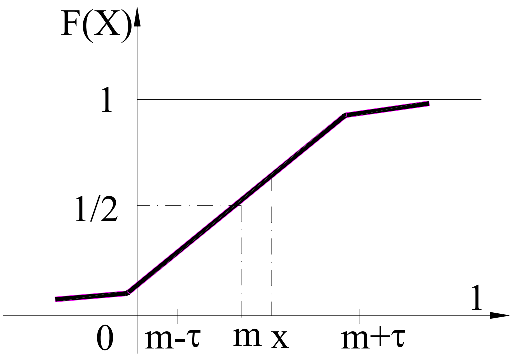
5) Moda şi mediana au valori egale cu m

$$\left(M(X) = M_e(X) = x_0 = m\right)\left(f'(x) = -\frac{x-m}{\sigma^2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}\right) \text{si } f'(x) = 0 \text{ are } x_0 = m.$$

Funcția de repartiție are expresia:

(2) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} n(t; m, \sigma)dt$

şi graficul:



Momentele centrate ale legii normale cu parametrii m şi σ (k≥2) sunt:

$$m_k = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^k e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx .$$

Făcând substituția $\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}} = y$ obținem:

$$m_k = \frac{\left(\sigma\sqrt{2}\right)^K}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^k e^{-y^2} dy .$$

Integrând prin părți cu $u = y^{k-1}, dv = ye^{-y^2} dy$ obținem formula de recurență:

(3) $\quad m_k = (k-1)\sigma^2 m_{k-2}$.

Ştiind că $m_0=1$, $m_1=0$, $m_2=\sigma^2$ rezultă $m_{2p-1}=0$ şi $m_{2p}=1\cdot3\cdot5 \ldots (2p-1)\sigma^{2p}$, $p \in \{1,2,\ldots\}$.

9.3 Distribuția Gama.

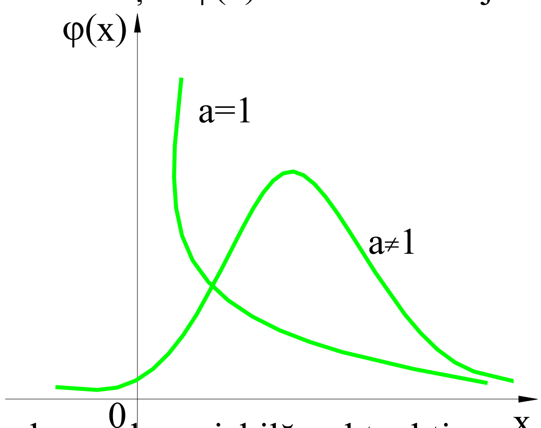
O variabilă X are o distribuție gama, dacă densitatea ei este dată de egalitatea:

(1) $$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(a)} \cdot \frac{1}{b^a} \cdot x^{a-1} e^{-\frac{x}{b}}, & \text{pentru } x \ge 0 \;\; a, b > 0 \\ 0 \;, & \text{pentru } \;\; x \le 0 \end{cases}$$

Ținând seama de definiția funcției:

$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt,\ z > 0,$ rezultă că $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1$ (în urma schimbării de variabilă x=bt).

Deoarece $\varphi(x) \ge 0$ si $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1$, rezultă că φ(x) reprezintă o densitate de repartiție. Graficul funcției φ(x) este redat mai jos:



Efectuând schimbarea de variabilă x=bt, obținem:

$$M(X)=\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)}\cdot b=ab\,.$$

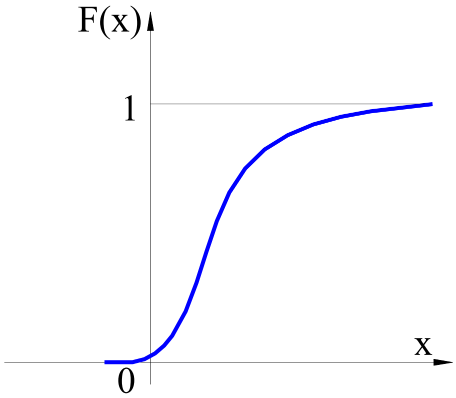
Moda x_0 are expresia $x_0=b(a-1)$ iar dispersia $D(x)=ab^2$. Momentele de ordinul k:

$$m_k=a(a+1)\ldots(a+k-1)b^k,\ k\in\{1,2,\ldots\}.$$

Funcția de repartiție F(x) este definită de relația:

$$F(x)=\begin{cases}\int_0^x \frac{1}{\Gamma(a)\cdot b^a}t^{a-1}e^{-\frac{t}{b}}dt, & x\geq 0\\ 0, & \text{pentru } x<0\end{cases}$$

şi are graficul:



9.4 Distribuția Beta

Spunem că o variabilă aleatoare X are distribuția Beta cu parametrii p şi q (p>0, q>0) dacă densitatea sa de repartiție este:

$$(1)\qquad \varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{B(p,q)}\cdot x^{p-1}(1-x)^{q-1} & \text{pentru } x\in[0,1]\\ 0 \ \text{pentru } x\notin[0,1]\end{cases}$$

Deoarece $\varphi(x)\geq 0$ şi $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx)=1$, rezultă că $\varphi(x)$ este o densitate de repartiție. Momentul de ordinul k este:

$$(2)\qquad m_k=\frac{p(p+1)\ldots(p+k-1)}{(p+q)(p+q+1)\ldots(p+q+k-1)}$$

iar valoarea medie şi dispersia sunt:

(3) $M(x)=\frac{p}{p+q},\ D(X)=\frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}$. .

Moda distribuţiei este $x_0=\frac{p-1}{p+q-2}$.

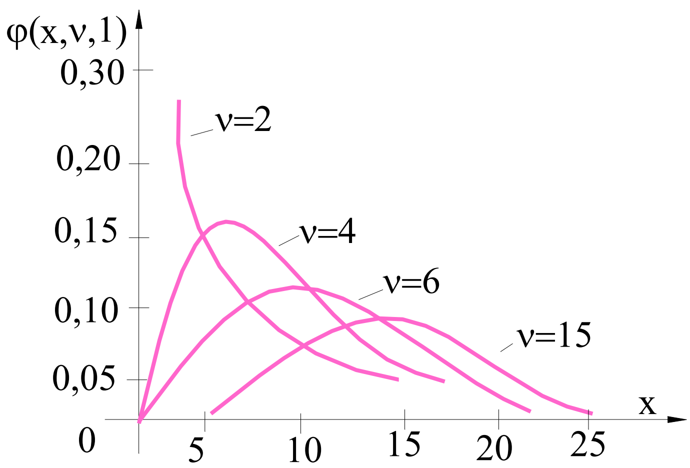
9.5 Distribuţia χ^2(hi -pătrat)

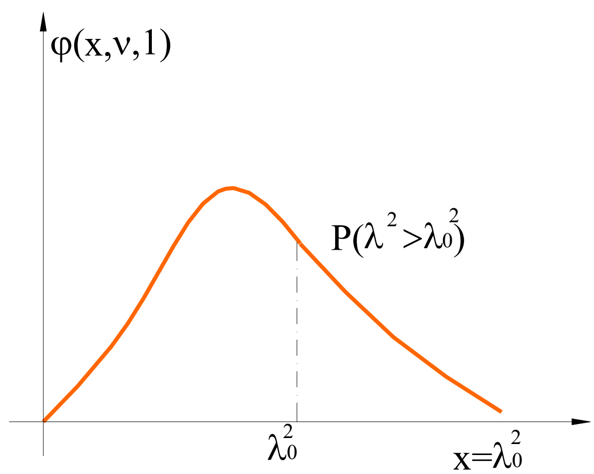
O variabilă aleatoare X are distribuţia χ^2 dacă densitatea de probabilitate:

$$(1)\qquad \varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{2^{\nu/2}a^{\nu}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}x^{\frac{\nu}{2}-1}e^{-\frac{x}{2a^2}}, x\geq 0\\ 0 \qquad ,\text{pentru } x<0\end{cases}$$

Distribuţia χ^2 a fost descoperită de Helmert în 1876 şi pusă în valoare 30 de ani mai târziu de R. Pearson. Ea are doi parametrii a>0 şi ν (ν reprezentând numărul gradelor de liberatate) şi se aplică în statistica matematică.

Pentru a=1 şi ν=2,4,6,15 graficele lui φ(x) sunt:





Pentru ν >30, graficul distribuției χ^2 se apropie de graficul distribuției normale. În practica statisticii este frecvent folosită funcția de repartiție complementară $P(\chi^2>\chi_0^2)=\delta$ (ale căror valori sunt tabelate pentru diferite valori a lui ν şi valorile uzuale a lui σ).

Observăm că $\varphi(x)$ îndeplineşte condițiile unei densități de probabilitate:

a) $\varphi(x)\geq 0$ şi $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx = 1$ ultima egalitate se obține făcând schimbarea de variabilă x=2t.

Caracteristici ale distribuției χ^2:

$M(X)=a^2\nu$, $D(X)=2a^4\nu$, $x_0=(\nu-2)a^2$, $m_3=8a^6\nu$, $m_4=12a^8\nu(\nu+4)$.

Funcția carcateristică $c(t)=(1-2ia^2t)^{-\nu/2}$. Dacă $\upsilon\to\infty$ într-o distribuție χ^2 atunci distribuția tinde către n(x;0;1).

9.6 Distribuția Poisson (legea evenimentelor rare).

Să considerăm legea binominală:

$$p_n(\alpha)=C_n^{\alpha}p^{\alpha}(1-p)^{n-\alpha}$$

în care presupunem n foarte mare şi p foarte mic.

Notăm $np=\lambda$ şi avem:

$$p_n(\alpha)=\frac{n(n-1)\ldots(n-\alpha+1)}{\alpha!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^{\alpha}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-\alpha}.$$

Vom scrie încă:

(1) $$p_n(\alpha)=\frac{n(n-1)\ldots(n-\alpha+1)}{n^{\alpha}}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-\alpha}\frac{\lambda^{\alpha}}{\alpha!}.$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n-1)\ldots(n-\alpha+1)}{n^{\alpha}}=1$ si $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-\alpha}=e^{-\lambda}$, pentru n foarte mare vom înlocui primii doi factori din (1) prin limitele lor. Obținem valoarea asimptotică:

(2) $$P_n(\alpha)\cong\frac{\lambda^{\alpha}}{\alpha!}e^{-\lambda}.$$

Definiție. Dacă o variabilă aleatoare X ia valorile α=0,1,2,… cu probabilitățile $\frac{\lambda^{\alpha}}{\alpha!}e^{-\lambda}$ unde λ este un parametru real, se spune că variabila X este de tip *Poisson* sau că legea sa de probabilitate este o *lege de tip Poisson*. Legea lui Poisson se aplică în cazul evenimentelor ce se întâmplă foarte rar. De aceea legea lui Poisson se mai numeşte şi lege evenimentelor rare. Pentru ca legea de mai sus să fie o lege de probabilitate, este necesar ca suma probabilităților sale să fie egală cu 1. Această condiție este îndeplinită, $\sum_{\alpha=0}^{+\infty}\frac{\lambda}{\alpha!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}e^{\lambda}=1$.

Proprietăți.

1) Valoarea medie a unei variabile Poisson este : M(X)=λ. Întra-devăr,

$$M(X)=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\alpha\frac{\lambda}{\alpha!}e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{\lambda^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}=\lambda\cdot e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda.$$

2) Funcția carcateristică a unei variabile de tip Poisson este : $c(t)=e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}$. Aceasta se obține uşor pornind de la definiție:

$$c(t)=\sum_{\alpha=0}^{\infty}e^{it\alpha}\frac{\lambda^{\alpha}}{\alpha!}e^{-\lambda}=e^{-\alpha}\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda e^{it}\right)^{\alpha}}{\alpha!}=e^{-\lambda}e^{\lambda e^{it}}=e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}.$$

3) Dispersia variabilei Poisson este egală cu λ. Conform definiției $D(X)=M(X^2)-[M(x)]^2$. Pentru a calcula $M(X^2)$ folosim definiția:

$$M\left(X^2\right)=-\left[\frac{d^2c(t)}{dt^2}\right]_{t=0}=-\left[\left(-\lambda^2e^{2it}-\lambda e^{it}\right)e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}\right]_{t=0}=\lambda^2+\lambda.$$

Înlocuind în egalitatea precedentă, se obține: $D(X)=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$.

9.7. Distribuția „t" (Student)

Variabila aleatoare este repartizată Student cu ν grade de libertate, dacă funcția densitate de probabilitate este:

(1) $$\varphi(t;\nu)=\frac{1}{\sqrt{\nu\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}},t\in(-\infty,+\infty).$$

Şi în acest caz, se poate arăta uşor că sunt îndeplinite condiţiile ca „t” să fie o densitate de probabilitate:

a) $\varphi(t;\nu)\geq 0$ (evidentă);

b) $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t;\nu)dt=1$ (cu schimbare de variabilă $t^2=\nu y$)

Caracteristicile variabilei sunt:

$$M(x)=0, D(X)=\frac{\nu}{\nu-2}, x_0=0, m_{2k+1}=0$$

$$m_{2k}=\frac{\nu^k 1\cdot 3...(2k-1)}{(\nu-2)(\nu-4)...(\nu-2k)}.$$

Practic pentru ν>30, distribuţia „t” Student este aproximată de distribuţia normală n(t;0;1), graficele respective confirmând acest fapt (fig.a).

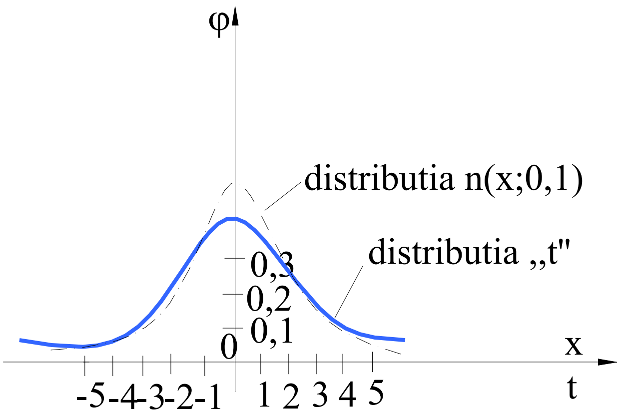


Fig.a

În practica statistică matematice pentru distribuţia Student tabelată funcţia: $P(|X|>t)=\delta$ (fig b haşurat).

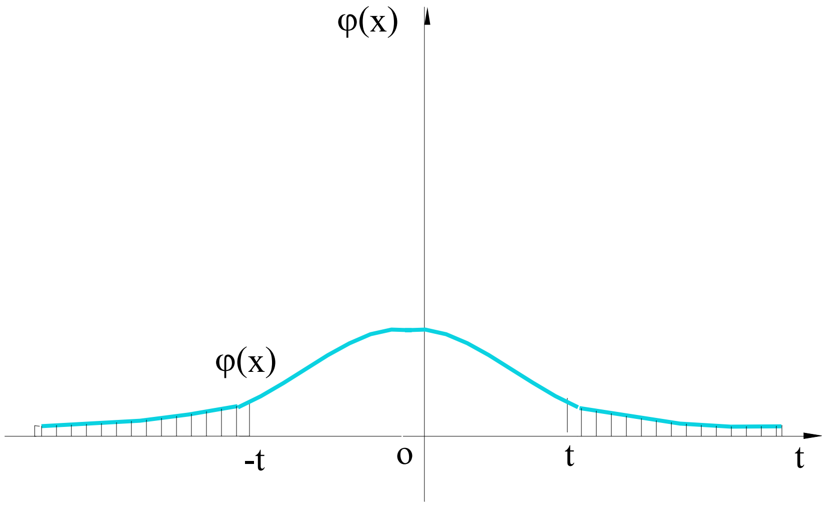


Fig. b

10. Convergența în repartiție sau în sens Bernoulli.

Fie F_n şi F. respectiv funcțiile de repartiție ale variabilelor X_m şi X. Şirul de variabile aleatoare $\{X_n\}_{n\in N}$ converge în repartiție către variabila aleatoare X, dacă şirul funcțiilor de repartiție $\{F_n\}, n \in N$ converge către funcția de repartiție F în toate punctele de continuitate ale lui F.

Activitatea practică are uneori să cunoaştem condițiile în care acțiunea mai multor factori întâmplători conduc la un rezultat care să permită să prevedem evoluția unui anumit fenomen. Astfel de condiții se dau în teoremele cunoscute sub denumirea de comună de *legea numerelor mari.*

1^0 ***Teorema lu Cebâşev***. Dacă X_1, X_2, …X_n, sunt variabile aleatoare (discrete sau continue) independente, ale căror dispersii sunt mai mici decât o constantă C, atunci pentru orice ε >0 avem:

$$(1) \qquad \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n} - \frac{\sum_{k=1}^{n} M(X_k)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Întra-devăr, fie variabila aleatoare $X = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n}$ pentru care avem:

$$M(X) = M\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n}\right) = \frac{\sum_{k=1}^{n} M(X_k)}{n},$$

$$D(X) = D\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n}\right) = \frac{\sum_{k=1}^{n} D(X_k)}{n^2} < \frac{n \cdot C}{n^2} = \frac{C}{n}.$$

Aplicarea inegalității Bienayme-Cebâşev asupra variabilei X, conduce la dubla inegalitate:

$$1 - \frac{C}{n\varepsilon^2} \le P\left(\left|\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n} - \frac{\sum_{k=1}^{n} M(X_k)}{n}\right| < \varepsilon\right) \le 1$$

care la limită devine (1). Teorema lui Cebâşev stă la baza teoriei selecției.

2^0 ***Teorema lui Bernoulli***. (Legea numerelor mari a lui Bernoulli.) Dacă se fac n experiențe independente, în fiecare experiență probabilitatea evenimentului A fiind p şi dacă x este numărul de operații al evenimentului A în cele n experiențe, atunci:

(2) $$\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{x}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Vom prezenta două teoreme , numite teoremă de convergență în lege, pentru a căror demonstrație se foloseşte de obicei funcția caracteristică.

a) Teorema lui Moivre-Laplace. Distribuția binominală în cazul când volumul n ala extracțiilor este mare, este aproximată de distribuția normală, adică are loc relația:

(3) $$\lim_{n\to\infty} C_n^x p^x q^{n-x} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{1\frac{1}{2}\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}}, \begin{cases} m = np \\ \sigma = \sqrt{npq} \end{cases}$$

b) <u>Teorema limită centrală</u> <u>(Laplace-Leapunov)</u>. Fie dat un sistem de variabile aleatoare X_k, $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ pentru care sunt îndeplinite următoarele condiții:

1^0 Variabile aleatoare X_k sunt independente;

2^0 Momentele centrate până la cel puțin ordinul trei există fiind mărginite; $m_{k_r} < C$, $k \in \{1,2,\ldots n\}$, $r \leq 3$, C-constantă.

3^0 Notând:

$$\tau_k^2 = D(X_k), \tau_X^2(n) = \sum_{k=1}^{n} \tau_k^2, \rho_k = \left| m_{k_3} \right|, \rho_X^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \rho_k,$$

fiind satrisfăcută relația:

(3) $$\lim_{n \to \infty} \frac{\rho_X^{*(n)}}{\tau_X^3(n)} = 0,$$

atunci variabila sumă $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$ are o distribuție asimptotică distribuția normală, oricare ar fi distribuțiile variabilelor X_k, $k \in \{1,2,\ldots,n\}$.

<u>11.Covarianța și corelația a două variabile aleatoare.</u>

Prin *covarianța* a două variabile aleatoare X și Y înțelegem expresia:

(1) cov (X,Y)=M[(X-M(X)) (Y-M(Y))].

Dacă Y este independentă de X, atunci cov (Y,X)=0 (analog dacă X este independentă de Y, cov (X,Y)=0).

Fiind date două variabile X și Y ale căror valori normate sunt Z_k, respectiv Z_y (a norma sau a reduce o variabilă abatoare înseamnă a centra variabila și a măsura argumentul prin abaterea medie pătratică), se numește coeficient de corelație a cuplului de variabile (X,Y) convarianța variabilelor normate. Notând ρ_{XY} coeficientul de corelație, prin definiție avem:

(2) $$\rho_{XY} = \text{cov}\left(Z_X, Z_y\right) = M\left[\frac{X - M(X)}{\tau_x} \cdot \frac{Y - M(Y)}{\tau_y}\right]$$ care se mai scrie:

(3) $$\rho_{XY} = \frac{M[(X - M(x)) \cdot (Y - M(Y))]}{\tau_x \cdot \tau_y} = \frac{\text{cov}(Y, X)}{\tau_x \cdot \tau_y} = \frac{\tau_{xy}}{\tau_x \cdot \tau_y}$$

Datorită simetriei în raport cu variabilele X şi Y avem:

$$\rho_{XY} = \rho_{YX} = \rho,$$

sau astfel spus coeficientul de corelaţie indică legătura ce există între variabilele perechi (X,Y) şi nu legătura de la o variabilă la cealaltă. Acest fapt permite să se spună că această legătură stochastică defineşte corelaţia variabilei X şi Y, sau că variabilele sunt corelate. Coeficientul de corelaţie are valorile $\rho \in [-1,1]$, marginele intervalului fiind atinse atunci când între X şiY a există o dependenţă liniară certă.

13. Aplicaţii ale teoriei probabilităţilor în teoria fiabilităţii.

Teoria fiabilităţii (teoria siguranţei în funcţionare) are ca scop găsirea legilor de apariţie a defecţiunilor echipamentlor sau utilajelor. Astfel, echipament sau utilaj poate fi: strung, tractor, automobil, aparatură industrială, fabrică, uzină, calculator, etc.

Prin *calitatea echipamentului* înţelegem mulţimea proprietăţilor ce definesc gradul de utilitate în exploatare.

Fiabilitatea echipamentului este capacitatea echipamentului de a-şi conserva calitatea în condiţii determinate de exploatare.

Timpul de funcţionare până la prima defecţiune. În cazul sistemelor complexe se studiază atât fiabilitatea sistemului în asamblul său cât şi fiabilitatea unor părţi componente considerate aparte ca entităţi de sine stătătoare. O parte indivizibilă a sistemului sau studiată ca un tot independent de părţile sale componente o vom numi element. În cazul unor echipamente sau a unor elemente perioada de timp de la darea în funcţiune până la apariţia avariei coincide cu durata de viaţă a echipamentului sau elementului respectiv (de exemplu becurile – la care nu se pune problema reparării).

Să considerăm ca moment iniţial momentul în care un element este pus în stare de funcţionare şi să notăm cu z timpul de funcţionare până la apariţia defecţiunii. Prin timp de funcţionare înţelegem perioada de funcţionare efectivă,

eliminând perioadele de întrerupere deliberată. z este o variabilă aleatoare a cărei funcție de repartiție o vom nota prin Q:

$$Q(t) = P(z < t) , (t > 0).$$

Vom presupune că funcția Q(t) este derivabilă în orice punct t > 0 şi notăm q(t) = Q'(t).

Probabilitatea ca elementul să fie în stare de funcționare la momentul t (sau să funcționeze fără să se defecteze un timp mai lung decât t) este:

$$\Phi(t) = P (z < t)=1-P(t) , (t > 0).$$

Funcția P(t) se numeşte *funcția de siguranță*.

Din proprietățile generale ale funcțiilor de repartiție şi din condițiile impuse lui Q se deduc imediat proprietățile funcției de siguranță Φ: este continuă şi derivabilă în orice t > 0, Φ(0) = 1 ; $\lim_{t\to\infty}\phi(t) = 0$.

Valoarea medie a timpului de funcționare fără defectare este

$$M(z) = \int_0^\infty tq(t)\,dt = \int_0^\infty \phi(t)dt - m^2$$

unde m = M(z).

În practică întâlnim numeroase exemple în care este important ca avariile să fie prevenite. În acest caz se stabileşte pe bază de calcule şi experiență o limită de funcționare t_0. Aceasta înseamnă că indiferent de starea în care se găseşte elementul sau echipamentul respectiv la momentul t_0, el este scos din funcțiune. (Este cazul cazanelor de la instalațiile de încălzire, al locomotivelor, vapoarelor etc.). Dacă z ar fi durata de viață a unui astfel de echipament fără impunerea unei durate maxime de funcționare, atunci adevărata valoare a acestei durate este

$$z^* = \min(z, t_0) .$$

Dacă Q^* este funcția de repartiție a lui z^* se vede imediat că pentru orice t ≥ 0:

$$Q^*(t) = P(z^* < t) = \begin{cases} Q(t) & pentru \quad t \leq t_0 \\ 1 & pentru \quad t > t_0, \end{cases}$$

şi corespunzător

$$\Phi^*(t) = 1 - Q^*(t) = \begin{cases} \Phi(t) & pentru \quad t \le t_0, \\ 0 & pentru \quad t > t_0. \end{cases}$$

Valoarea medie a variabilei z^* este

$$m^* = \int_0^\infty \Phi^*(t)dt = \int_0^{t_0} \Phi(t)dt$$

iar dispersia acestei variabile:

$$D^2(z^*) = 2\int_0^{t_0} t\Phi(t)dt - m^{*2} \ .$$

<u>*Funcția risc de defectare.*</u> Să considerăm evenimentele:

A: elementul funcționează fără să se defecteze până la momentul t;

B: elementul nu se defectează între momentele t şi t + h. Se observă că $A \cap B$ este evenimentul " elementul funcționează fără să se defecteze până la momentul t + h". Avem:

$$\text{P (B/A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(z > t + h)}{P(z > t)} = \frac{\Phi(t + h)}{\Phi(t)}.$$

Cu alte cuvinte, dacă elemntul nu se defectează până la momentul t, probabilitatea ca el să nu se defecteze până la momentul t + h este $\frac{\Phi(t+h)}{\Phi(t)}$.

Înseamnă că în aceeaşi ipoteză probabilitatea ca el să se defecteze înainte de momentul t + h este:

$$1 - \frac{\Phi(t + h)}{\Phi(t)} = \frac{\Phi(t) - \Phi(t + h)}{\Phi(t)}.$$

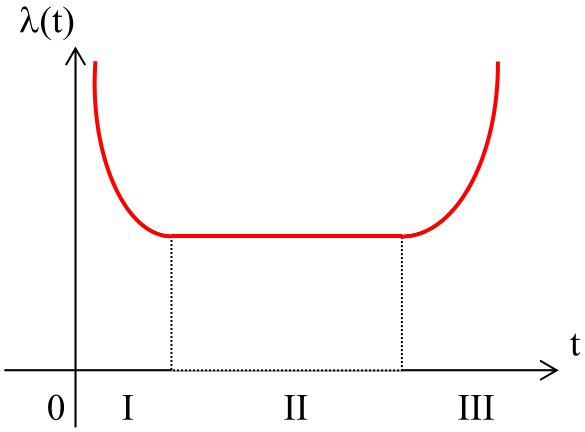
Dacă h este mic atunci

$$\Phi(t) - \phi(t + h) \cong h\phi'(t)$$

şi deci pentru un astfel de h

$$\text{P(B/A)} \cong -\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)} \cdot h = \lambda(t) \cdot h.$$

Funcția $\lambda(t)$ se numeşte *risc de defectare*. Graficul funcției empirice risc de defectare obținut prin prelucrarea datelor statistice este de forma:



Această formă a graficului sugerează existenţa a trei perioade distincte în timpul exploatării.În prima perioadă (I de pe figură) riscul de defectare descreşte cu timpul. În momentul punerii în stare de funcţionare a echipamentului încep să se manifeste viciile de fabricaţie ascunse. Cei care lucrează cu anumite utilaje ştiu că riscul de defectare este mai mic după trecerea unui timp de la darea în exploatare. Aceasta este perioada rodajului. A doua (II pe figură) perioadă este *perioada de funcţionare normală*. După trecerea perioadei de rodaj urmează o perioadă în care riscul de defectare se stabilizează şi practic nu depinde de timp. A treia (III pe figură) este *perioada de îmbătrânire* a echipamentului. Sub influenţa unor factori fizici şi chimici elementele se degradează ireversibil şi riscul de defectare creşte cu trecerea timpului.

Dacă considerăm ca moment iniţial momentul în care se termină perioada rodajului şi începe perioada de funcţionare normală, o lungă perioadă de timp riscul de defectare va fi practic constant. De multe ori nu se pătrunde prea adânc nici în cea de a treia perioadă, echipamentul fiind înlocuit în scopul prevenirii avariilor sau a uzurii morale înainte ca el să devină incapabil să mai funcţioneze. Dacă $\lambda(t) = \lambda$, $\lambda > 0$ aceasta înseamnă că

$$\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)} = -\lambda$$

de unde rezultă $\Phi(t) = e^{-\lambda t}$. Funcţia de repartiţie a duratei de funcţionare fără defectare este

$$Q(t) = 1- e^{-\lambda t}, \; t > 0,$$

adică durată are distribuție exponențială cu parametrul λ.

Această lege de fiabilitate nu este universală. În practică se întâlnesc frecvent situații în care datele experimentale nu concordă cu modelul de mai sus. O lege de probabilitate care apare din ce în ce mai des în teoria fiabilității este distribuția *Weibull.* Dacă z are distribuția Weibull cu parametrii λ şi α, adică funcția sa de repartiție este

$$Q(t) = 1- e^{-\lambda t^{\alpha}},\ t > 0.$$

atunci funcția de siguranță corespunzătoare este

$$\phi(t) = e^{-\lambda t^{\alpha}}$$

şi deci îi va corespunde funcția risc de defectare $\lambda(t) = \lambda \alpha t^{\alpha-1}$.

Legea Weibull este mai generală decât legea exponențială. Depinzând de doi parametrii, ea poate cuprinde un număr mult mai mare de cazuri concrete decât legea exponențială.

Dacă riscul de defectare este proporțional cu timpul:

$$\lambda(t) = 2\lambda t,\quad \lambda > 0 \text{ constant},$$

atunci din relațiile

$$\frac{\phi'(t)}{\phi(t)} = -2\lambda t; \phi(0) = 1$$

rezultă:

$$\Phi(t) = e^{-\lambda t^2}$$

şi suntem în cazul unei legi Weibull.

<u>14. Probleme propuse.</u>

1. Se consideră variabilele aleatoare independente

$$X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0,7 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad Y:\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 7 \\ 0,2 & 0,4 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}$$

Să se calculeze: m_{2X+4Y} şi D(2X +4Y).

2. Să se determine densitatea de repartiție a variabilei aleatoare X pentru care funcția caracteristică este $\Psi(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

3. Să se determine funcția caracteristică a unei variabile aleatoare X având densitatea de repartiție:

$$f(x) = \frac{1}{x(x^2+4)}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

CAPITOLUL X

PROBLEME DATE LA CONCURSURILE DE MATEMATICĂ „ *TRAIAN LALESCU*”- anul II- (Politehnică-) (*fazele naționale* - 1980- 1996) (selectiv).

1. Să se calculeze

$$I = \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}{(x+1)^3} dx \ .$$

= 1980 =

2. Să se determine soluția pe $[0, \infty)$ a ecuației diferențiale $xy'' + 2y' = x^2$ care satisface condițiile $y(0)=0$ şi este mărginită în vecinătatea originii folosind transformata Laplace.

= 1981 =

3. Fie $f(x,t) = e^{\frac{x}{2}(t-\frac{t}{2})}$ olomorfă pentru $x \in R$ fixat şi $0 < |t| < \infty$. Dacă f(x,t) admite o dezvoltare în serie Laurent de forma $f(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)\cdot t^n$ atunci f(x,t) verifică următoarele relații:

$$2J_n'(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x),$$

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) \ , \quad x \in R^*.$$

= 1981 =

4. Folosind metoda separării variabilelor să se afle soluția ecuației:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} = a^2 u, \text{ a>0 care}$$

satisface condițiile:

(1) u(x,t) = u(x,t + 2л) , $x \in R^*, t \geq 0$

(2) u(0,t) = $\frac{1}{5 - 3\cos t}$.

= 1982 =

5. Să se dezvolte în serie Fourier funcția

$$f : R \to R, f(x) = \frac{1}{1 - 2a\cos x + a^2}, \text{ a > 1.}$$

= 1983 =

6. Se dă ecuația cu derivatele parțiale:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

a) Să se determine tipul ecuației şi să se aducă la forma canonică;

b) Să se determine soluția generală;

c) Să se determine soluția particulară care satisface condițiile: u(0,y) = 2y, $\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 2$.

=1989 =

7. a) Să se determine funcția morfă f(z) = u(x,y) + iv(x,y) pentru care

u(x,y) = $e^x \cos y + x\sin x ch y - y sh y \cos x$;

b) Să se calculeze: $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3x}{5-4\cos x}dx$.

=1985 =

8. Fie $\vec{r}$ vectorul de poziție al punctului de coordonate (x,y,z) $\in R^3$ şi $\varphi : R^3 \to R$ o funcție armonică într-un domeniu D$\subset R^3$.

a) Să se determine parametrii reali a,b astfel încât

$$\text{grad } (\vec{r} grad\varphi) + a rot(\vec{r} x grad\varphi) + b grad\varphi = 0$$

pentru orice funcție armonică φ.

b) Să se exprime printr-o integrală de suprafață integrala triplă:

$$I = \iiint_\Omega \left[grad\varphi + (\vec{r}\nabla)grad\varphi\right]dw$$

unde Ω este un domeniu cu frontiera suficient de regulată, Ω⊂D,

$$\vec{r}\ \nabla = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}.$$

= 1986 =

9. a) Să se determine funcția monogenă f ştiind că f(z) = $\varphi(x+\sqrt{x^2+y^2})$, φ derivabilă.

b) Să se calculeze:

$$I = \int_{|z|=R} \frac{e^{-\frac{1}{z}}}{(z-1)}dz, R \neq 1.$$

= 1987 =

10. a) Să se determine funcțiile olomorfe f: $C \to C$ pentru care u(x,y) = $\varphi(x) \cdot \psi(y)$ cu φ şi ψ de clasă $C^2(R)$ unde u (x,y) = $\operatorname{Re} f(z)$, z = x + iy.

b) Să se calculeze:

$$I = \int_0^\infty \frac{x \sin ax}{(x^2 + b^2)(x^2 + c^2)} dx,$$

unde a,b,c $\in R$.

=1988 =

11. Se dă funcția complexă

$$F(p) = \frac{1}{(p+1)\left[(p+1)^2 + \omega^2\right]}, \omega > 0,$$

p$\in$Z. Se cere:

a) Să se determine funcția original f(t);

b) Să se rezolve ecuația integrală:

$$\int_0^t g(u) f(t-u) du = e^{-t}(\omega t - \sin \omega t).$$

c) Să se calculeze : $I_1 = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt$.

d) Pentru ω = 2 să se calculeze:

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} e^t f(t) \cos^6 t dt .$$

= 1989 =

12. Să se calculeze integrala:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\left(a + bx^2\right)^n}$$ unde a şi b sunt numere reale, strict pozitive,

$n \in N$.

Folosind rezultatul obținut să se calculeze:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\left(1 + x^2\right)^{1993}}.$$

= 1993 = (Univ.C.Brâncuşi Tg.Jiu)

13. Să se calculeze integrala:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x \cdot \sin nx}{5 - 4\cos x} dx \qquad n \in N^*.$$

=1996= (Univ.Cluj Napoca)

BIBLIOGRAFIE

1.BĂLAN T., **Matematici speciale**, Universitatea Craiova 1980.

2.BĂLAN T., FLORESCU G., STOICA L., **Curs de matematici speciale**, Repro. Univ. Craiova, 1978 (2 vol.)

3. CIUCU C., CRAIU V., **Probleme de teoria probabilităților**, Editura Tehnică, Bucureşti, 1974.

4. BRÂNZARU T., CRSTICI B., ş.a., **Matematici speciale**, EDP, Bucureşti, 1981.

5. DOBRESCU V., DOBRESCU L., **Matematici speciale**, EDP, Bucureşti, 1967.

6.IOVANOV M., PECINGINA O. **Matematici speciale –probleme** ,2006 Tg.Jiu Departamentul de matematică Univ.”C.Brancuşi’ Tg.Jiu.

7. IOVANOV M. **Matematici speciale** , Universitatea “Constantin Brâncuşi’ –Tg.Jiu, 1993.

8. KECS W., **Complemente de matematici cu aplicații în tehnică**, Editura Tehnică, Bucureşti, 1981.

9. LAVRENTIEV M.A., **Curs de calcul variațional,** Editura Tehnică, Bucureşti 1955.

10. LEBEDEV N.N., **Funcțiile speciale şi aplicațiile lor,** Editura Tehnică, Bucureşti, 1957 (traducere din limba rusă).

11. MOCANU P.T., HAMBURG P., NEGOESCU N., **Analiză matematică (funcții complexe),** EDP, Bucureşti, 1982.

12. **MAYER O.,** **Teoria funcțiilor de o variabilă complexă,** Editura Acad., Bucureşti, 1981.

13. **OLARIU V., STĂNĂŞILĂ O.,** **Ecuații diferențiale şi cu derivate parțiale,** Editura Tehnică, Bucureşti, 1982.

14. **RUS A.I., PAVEL P., MICULA G., IONESCU B.,** **Probleme de ecuații diferențiale şi cu derivate parțiale,** EDP, Bucureşti, 1982.

15. **ŞICLOVAN. I., MATEI I., POPESCU I., CREȚ F.,** **Matematici speciale,** Culegere de probleme, Lit. IMP, Petroşani, 1988.

16. **ŞABAC Gh.,** **Matematici speciale,** vol. I, II, EDP, Bucureşti, 1965.

17. **UNGUREANU V.,** **Matematici speciale,** Editura MIRTON, Timişoara,2003